Álgebra II
Práctica 6 - Módulos, submódulos y morfismos de módulos

A lo largo de esta práctica A-módulo significa A-módulo a izquierda.

1. Determinar si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \mid n$, con la suma usual de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y la acción $a \cdot x = r_m(ax)$.

ii) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción producto usual de matriz por escalar.

iii) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción

$$f \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(1)x_1, f(0)x_2, \ldots, f(0)x_n).$$

iv) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción $a \cdot x = \det(a)x$ para $a \in M_n(\mathbb{Z})$ y $x \in \mathbb{Z}$.

2. Sea K un cuerpo.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que existe una única estructura de $K[X]$-módulo en V que satisface

$$(kX^0) \cdot v = k \cdot v \quad \text{y} \quad X \cdot v = f(v).$$

ii) Sea M un $K[X]$-módulo y sea $f : M \longrightarrow M$ la función definida por $f(v) = X \cdot v$. Probar que con la acción $k \cdot v := (kX^0) \cdot v$, M es un K-espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}_K(M)$.

3. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot_\varphi x := \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

4. Sea M un A-módulo y sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de M. *Se llama* anulador *de S al conjunto*

$$An(S) = \{a \in A : a \cdot s = 0, \ \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $An(\{x\})$ se nota $An(x)$. Un A-módulo M se dice fiel *si $An(M) = \{0\}$.*

i) Probar que $\mathrm{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A.

ii) Probar que $\mathrm{An}(S) = A$ si y sólo si $S = \{0\}$.

iii) Probar que si $S \subseteq T$, entonces $\mathrm{An}(T) \subseteq \mathrm{An}(S)$.

iv) Probar que $\mathrm{An}(S) = \bigcap_{s \in S} \mathrm{An}(s)$.

v) Probar que $M_n(A)$ es un A-módulo fiel y exhibir otros ejemplos de módulos fieles.

vi) Probar que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con $n > 2$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo fiel y determinar $\mathrm{An}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

vii) Probar que si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, entonces $\mathrm{An}(M^X) = \mathrm{An}(M^{(X)}) = \mathrm{An}(M)$.

5. Sea M un A-módulo y sean S un subconjunto de M y N un submódulo de M. *Se llama* transportador *de S en N al conjunto*

$$(N : S) = \{a \in A : a \cdot s \in N,\ \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ será denotado $(N : x)$.

i) Probar que $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.

ii) Probar que $(0 : S) = \mathrm{An}(S)$ y $(N : S) = A$ si y sólo si $S \subseteq N$.

iii) Probar que si $S \subseteq T$, entonces $(N : T) \subseteq (N : S)$.

iv) Probar que si P es un submódulo de M tal que $N \subseteq P$, entonces $(N : S) \subseteq (P : S)$.

v) Probar que $(N : x) \cdot x = N \cap (A \cdot x)$.

vi) Probar que si $X \neq \emptyset$, entonces $(N^X : M^X) = (N^{(X)} : M^{(X)}) = (N : M)$.

vii) Determinar $(m\mathbb{Z} : n)$ para $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Determinar si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0,\ 1 \leq i \leq n\}$.

ii) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(a_{ij}) = 0\}$.

iii) A un anillo, $M = A^n$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

iv) A un anillo conmutativo, $M = A[X]$, $S = A_n[X] = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea A un anillo conmutativo y sea $a \in A^{n \times m}$. Probar que la aplicación $f_a : A^{m \times 1} \longrightarrow A^{n \times 1}$ definida por $f_a(x) = a \cdot x$ (donde $\cdot$ es el producto de matrices) es un morfismo de A-módulos.

8. Sea A un anillo conmutativo y sea M un A-módulo. Probar que f es un morfismo de A-módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo, en cada uno de los siguientes casos:

i) $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$, con $n > 2$.

ii) $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n)$.

iii) Para $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots 0)$.

iv) Para $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

v) Fijado $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(g) = g(a)$.

vi) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ para $a = (a_{ij})_{i,j}$.

vii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

9. Sean M, N y P A-módulos y sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow P$ funciones. Probar que

i) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y g es un monomorfismo, entonces f es un morfismo de A-módulos

ii) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y f es un epimorfismo, entonces g es un morfismo de A-módulos.

10. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

se llama el gráfico de f. Probar que si M y N son A-módulos, entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \times N$.

11. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

i) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

ii) $N = M^n$ con $n > 2$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

iii) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.

iv) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0, 1 \leq i \leq n\}$.

v) X conjunto, $N = M^X$, $S = \{x \in N/x_i = 0\ \forall\, i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de X.

12. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$, y el *doble dual* de M a $M^{**} = \mathrm{Hom}_A(M^*, A)$. Probar que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por

$$\psi(x)(f) = f(x),\ x \in M,\ f \in M^*$$

es un morfismo de A-módulos y que $\mathrm{Nu}(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \mathrm{Nu}(f)$.

13. Sea A un anillo y M, N A-módulos.

i) Probar que $\mathrm{Hom}(M, N)$ es un $\mathcal{C}(A)$-módulo.

ii) Probar que $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos

14. Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

15. *Un A-módulo M se dice* simple *si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.*

i) Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A \cdot x = M, \forall\, x \in M \setminus \{0\}$.

ii) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que

(a) Si M es simple, entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

(b) Si N es simple, entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

(c) Si M y N son simples, entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo,

iii) Probar que si M es simple, $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división