Álgebra II
Práctica 5 - Dominios principales, noetherianos y de factorización única

1. Probar que si K es un cuerpo entonces $K[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

2. Sea A un anillo. Probar que A es Noetheriano si y sólo si para todo conjunto $\mathcal{I}$ de ideales de A, $\mathcal{I}$ posee un ideal que es maximal (en $\mathcal{I}$) en el sentido de la inclusión.

3. Sea A un anillo Noetheriano y $f : A \to A$ un endomorfismo de anillos sobreyectivo. Probar que f es inyectivo.

4. Sea A un anillo Noetheriano y $I \trianglelefteq A$ un ideal bilátero. Probar que A/I es Noetheriano.

5. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.

6. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$. Probar que $K[X]/\langle f\rangle$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible en $K[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo K por un anillo conmutativo A?

7. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{P}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{P}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/\mathcal{P}$ es un dominio íntegro.

8. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

9. Sean A y B anillos conmutativos, $\mathcal{P}$ un ideal primo de B y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.

10. Probar que si $\mathcal{P}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

11. Probar que todo ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:

i) $\langle p\rangle$ ó $\langle p, f\rangle$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ es irreducible.
ii) $\langle f\rangle$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

12. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/\langle p\rangle \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

13. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. Probar que $\langle p\rangle$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ sii -1 no es un cuadrado módulo p.

14. Caracterizar los anillos cocientes

i) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2, X\rangle$
ii) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2\rangle$
iii) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2X\rangle$
iv) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle$
v) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$
vi) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2, 1 + i\rangle$

15. A un dominio íntegro y $a \in A$. Probar:

i) a primo $\Rightarrow$ a irreducible.
ii) si A es un DFU, entonces a irreducible $\Rightarrow$ a primo

III) En $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿ Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ un DFU ? ¿ Es un DF?

16. Sea A un dominio íntegro Noetheriano. Probar que todo elemento no nulo se puede factorizar en elementos irreducibles. Concluir que si todo irreducible es primo, entonces A es DFU.

17. Sean $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Buscar algún ejemplo de A y C DFU, B no.

18. Sea A un dominio íntegro, I un ideal propio de A; $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} := \sum \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$. Probar que si f es reducible en $A[X]$, entonces $\bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$.

Enunciar el contrarrecíproco y aplicarlo a $\mathbb{Z}$.

19. Sea A un DFU y K su cuerpo de cocientes. Probar que si $f \in A[X]$ es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en K también es irreducible.¿ Vale la recíproca?

20. *Lema de Gauss:* Sea A un DFU y K su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in K$ es raíz de f, demostrar que p/a_0 y q/a_n en A.

21. Probar que

I) $X^4 - X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

II) $X^2 + Y^2 - 1$ es irreducible en $Q[X, Y]$. ¿ Lo es en $\mathbb{C}[X, Y]$?

III) $XY - ZT$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$.

22. Factorizar $-X^3 - Y^3 - Z^3 + X^2(Y + Z) + Y^2(X + Z) + Z^2(X + Y) - 2XYZ$ en $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

23. *Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:* Sea A un DFU y K su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$.Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:

I) p no divide a a_n,

II) p divide a a_i, $0 \leq i \leq n - 1$,

III) p^2 no divide a a_0.

Probar que entonces f es irreducible en $K[X]$.

24. Probar que

I) $X^{p-1} + pX^{p-2} + \binom{p}{2} X^{p-3} + \ldots + \binom{p}{2} X + p$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

II) $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ (sug: cambio de variables).