Álgebra II
Práctica 4 - Anillos, ideales y morfismos de anillos

Todos los anillos aquí son unitarios.

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

i) $(M_n(A), +, \cdot)$, matrices de $n \times n$ con A anillo conmutativo.

ii) $\{f : A \longrightarrow A \text{ función}\}$ con A anillo; $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$; $(f \cdot g)(a) := f(a) \cdot g(a)$.

iii) $A_1 \times \ldots \times A_n$; $A_1, \ldots, A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada.

iv) $\{\mathcal{P}(X), \triangle, \cap\}$ con X conjunto.

v) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g \,:\, a_g \in \mathbb{Z}, a_g \neq 0 \text{ para finitos } g\}$ con

$$\sum a_g g + \sum b_g g = \sum (a_g + b_g) g \quad ; \quad (\sum a_g g) \cdot (\sum a_h h) = \sum a_g b_h g \cdot h.$$

vi) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.

Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

i) un anillo de división que no sea cuerpo.

ii) un anillo que no sea íntegro.

iii) un anillo íntegro que no sea de división.

3. Sea n compuesto y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con la suma usual. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ un cuerpo?

4. Consideramos el anillo $A = \mathcal{C}[0,1]$ de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$.

i) ¿ Hay divisores de cero en A ?

ii) Determinar $\mathcal{U}(A)$?

5. Sea A un anillo.

i) Probar que $\mathcal{U}(A)$ es un grupo multiplicativo.

ii) Caracterizar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

iii) ¿ Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

iv) ¿ Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$?

6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

i) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a+b\sqrt{3} = c+d\sqrt{3}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

ii) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función norma definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que es multiplicativa.

iii) Probar que $2+\sqrt{3}$ es una unidad.

iv) Probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si y sólo si $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.

v) Hallar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

7. Caracterizar el grupo de unidades de $\mathbb{Z}$, K cuerpo, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $D[X]$ con D dominio íntegro.

8. Sea D un dominio íntegro finito. Probar que D es un cuerpo.

9. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

10. Sea A un anillo conmutativo y $f \neq 0$ en $A[X]$. Probar que si f es un divisor de cero en $A[X]$ entonces existe $a \in A$ tal que $a \neq 0$ y $af = 0$.

11. Probar que si A es un dominio íntegro entonces $A[X]$ es un dominio íntegro.

12. Sea K un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(K)$ son 0 y $M_2(K)$. ¿Es $M_2(K)$ un anillo de división?

13. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = \mathrm{id}$.

14. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

15. Sea A un anillo conmutativo. ¿ Es el determinante $det : M_n(A) \longrightarrow A$ un morfismo de anillos ?Y ¿ la traza?

16. Calcular el grupo de automorfismos de anillos de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $\mathbb{Q}[w_n]$ con w_n raíz n-ésima primitiva de 1.

17. Mostrar los isomorfismos

i) $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X\rangle \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i]$.

ii) $\mathbb{R}[X]/\langle X^4 - 1\rangle \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

18. Sea A un anillo conmutativo y sea B un subanillo de A. Probar o dar contraejemplo:

i) A cuerpo $\Rightarrow$ B cuerpo.

ii) A dominio íntegro $\Rightarrow$ B dominio íntegro.

iii) B dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro.

19. Probar que $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \simeq \mathbb{Z}[i]$.

20. Probar que para todo anillo A existe un subanillo B de A tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

21. Probar que $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+2i\rangle$.

22. Determinar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[X]/\langle X^3\rangle)$.

23. Sea A anillo y $Z(A) := \{x \in A : xy = yx, \forall\, y \in A\}$ su centro. Probar que si $\forall x \in A, x^2 - x \in Z(A)$ entonces A es conmutativo.