Álgebra II
Práctica 3 - Acciones de grupo, subgrupos de Sylow

1. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular ${}^{G}X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X.

i) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b;\ a \in \mathbb{R}^{\times}, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$.

ii) $G = \mathbb{R}^{\times}$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^{\times}$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

iii) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \lhd G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción $\cdot$ de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x$ para todo $a \in G$ y $x \in X$.

3. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

4. Sea G un grupo.

i) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$.

ii) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano.

iii) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.

iv) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

v) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

5. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G, G]$ y calcular $|\mathcal{C}(G)|$.

6. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \lhd G$.

7. Sea p primo y $|G| = n$. Probar que existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G$, $\mathrm{o}(x) = p^s$ para algún s. (s depende de x)

8. Probar que G es un p-grupo $\Leftrightarrow \forall H \lhd G$, H y G/H son p-grupos.

9. Calcular todos los p- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z},\ S_3 \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ S_3 \oplus S_3.$$

10. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

11. Meditar sobre el hecho de que si G tiene un único p-subgrupo de Sylow propio para algún p, entonces G no es simple.

12. Probar que un grupo de orden 56 no es simple.

13. Sean p, q primos , $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

14. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

$30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075.$

15. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \lhd G$. Probar

i) $H_p \cdot H_q$ es subgrupo de G

ii) $H_p \cdot H_q \lhd G \Rightarrow H_q \lhd G$.

16. Probar que si $G \simeq_d H \cdot K$ con H y K grupos abelianos, entonces G es abeliano.

17. Probar que para $n \geq 3$, S_n y D_n son isomorfos a productos semidirectos convenientes.

18. ¿Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto?

19. Probar que S es un factor semidirecto de G en los siguientes casos:

i) $G = \mathbb{C}^\times,\ S = S^1$.

ii) $G = G_{12},\ S = G_3$.

iii) $G = \mathbb{C},\ S = \mathbb{R}$.

iv) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ S = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.