Álgebra II - 2do Cuatrimestre 2018

Clase Práctica - 4/9

El objetivo de esta clase es usar un poco el teorema de Lagrange – cerrando así la práctica 1 – y empezar con cocientes – comenzando la práctica 2 –.

Ejercicio 1. Clasificar los grupos de orden 8 salvo isomorfismo.

La manera de abordar este ejercicio es ser un poco más inteligente que simplemente escribir todas las posibles tablas de multiplicación de 8×8 y ver cuáles son iguales salvo permutación. La idea es tratar de describir las posibles opciones que poseen los elementos de un grupo de orden 8 e ir emparejando dichos elementos a otros elementos de grupos ya conocemos. La herramienta vital para este ejercicio va a ser

Teorema 2 (Lagrange)**.** *Sea G un grupo finito y $S \leq G$ un subgrupo. Entonces $|S| \mid |G|$.*

Sea entonces G un grupo de orden 8. Intentemos describir los elementos de G. Sea $a \in G$ un elemento que no sea el elemento neutro del grupo y H el grupo generado por a. Según el teorema de Lagrange, el subgrupo H tiene orden un divisor de 8. que además, no puede ser 1 (de lo contrario, $a = 1_G$). Recordemos además que el orden del subgrupo generado por a es igual al *orden* de a. Analicemos los casos de los posibles órdenes de a por separado:

Caso 1 a tiene orden 8. En este caso entonces, $G = \langle a \rangle$ y por lo tanto podemos definir un isomorfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{Z}/8 \\ a^k &\longmapsto k \end{aligned}$$

Verificar que el hecho que a posea orden 8, permite exactamente que el isomorfismo anterior esté bien definido.

Caso 2 No hay elementos de orden 8. Si bien a podría tener orden 2 o 4 (dado que esos son los otros posibles divisores de 8 que no analizamos), a es un elemento arbitrario. De existir un elemento de orden 8, podemos volver al caso 1 cambiando a por este nuevo elemento. Sea b un elemento en $G \setminus H$. Dado que $b \notin H$, tenemos que $a^j b \notin H$ (sino $a^j b = a^k$ y por lo tanto $b = a^{k-j}$ contradiciendo que b no está en H).

Caso 2a a tiene orden 4. Entonces el conjunto Hb tiene cardinal 4 pues posee los elementos, $\{b, ab, a^2b, a^3b\}$ (¡verificar que no hay repeticiones!). Por lo tanto $G = H \cup Hb$. Esto determina tres opciones para el elemento ba, puede ser ab, a^2b o a^3b. Por otro lado, puede suceder que b tenga orden 2 o tenga orden 4.

Caso 2a-i b tiene orden 2. Veamos las posibilidades en esta situación: Si $ab = ba$, entonces a y b conmutan. Se puede ver fácil entonces que hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \\ a^k b^j &\longmapsto (k, j). \end{aligned}$$

Si $ba = ab$ entonces

$$a = b^2 a = b(ba) = ba^2 b = (ba)(ab) = a^2(ba)b = a^4 b^2 = 1_G$$

lo que contradice que $a \neq 1_G$. Si $ba = a^3 b$ entonces hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{D}_4 \\ a^k b^j &\longmapsto r^k s^j. \end{aligned}$$

Caso 2a-ii Todos los elementos de Hb tienen orden 4. De la misma manera que antes, podemos suponer que todos los elementos de $G \setminus H$ tienen orden 4, si hubiese uno de orden 2 cambiamos a b por ese nuevo y volvemos al caso 2a-i. Si todos los elementos tienen orden 4 en particular b tiene orden 4, pero b^2 tiene orden 2, por lo que debe suceder que b^2 está en H, pero el único elemento en H con orden 2 es a^2, de modo que $a^2 = b^2$. Por otro lado si $ba = ab$ entonces

$$(a^3b)^2 = a^6b^2 = a^8 = 1_G$$

que contradice que a^3b tiene orden 4. Si $ba = a^2b$ entonces

$$ba = a^2b = b^2b = b^3$$

Lo que implica que $a = b^2$, que es imposible dado que tienen órdenes distintos. Finalmente queda que $ba = a^3b$. En este caso tenemos un isomorfismo definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{H} \\ a^n &\longmapsto i^n \\ b^m &\longmapsto j^m \\ ab &\longmapsto k \\ ba &\longmapsto -k. \end{aligned}$$

Caso 2b No hay elementos de orden 4. Como en los casos anteriores, si a tiene orden 2 pero hay otro elemento de orden 4 podemos volver al caso 2a cambiando a por el nuevo elemento. Si no hay elementos de orden 4, entonces todos los elementos tienen orden 2. En la clase pública del otro día, vimos en la teórica que si un grupo tiene todos sus elementos de orden 2 entonces es abeliano (si no lo recuerda, entonces pruébelo). Sea b distinto de a y de 1_G y sea c distinto de a, b, ab y 1_G. Entonces tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \\ a^ib^jc^k &\longmapsto (i, j, k) \end{aligned}$$

En conclusión, hay 5 grupos de orden 8 (salvo isomorfismo), tres abelianos $\mathbb{Z}/8$, $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ y $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ y dos no abelianos $\mathbb{D}_4$ y $\mathcal{H}$. $\square$

Ejercicio 3 (Para hacer en casa)**.** Sea $G \leq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2)$ el subgrupo dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/2 \right\}.$$

Probar que G tiene orden 8. ¿A que grupo de los del ejercicio anterior es isomorfo?

Como se ve en la solución, clasificar grupos de un orden dado puede ser muy dificil. Por eso, tratar de entender subgrupos del grupo es una herramienta útil. Sin embargo, a veces entender los subgrupos puede ser aún muy complicado y/o no ser suficiente. Por eso también es útil entender los *cocientes* del grupo. Más adelante, entenderemos que la idea de *subgrupo* y la idea de *cociente* son “duales” una de la otra.

Subgrupos normales y Cocientes

La primera observación importante es que para poder cocientar un grupo por un subgrupo, el subgrupo debe ser normal.

Definición 4. Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Decimos que H es *normal* en G si para todo elemento $g \in G$, sucede que $gHg^{-1} \subseteq H$.

Observación 5. *Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces $I_g : G \to G$ dada por $I_g(x) = gxg^{-1}$ es un morfismo de grupos, ya que*

$$I_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = I_g(x)I_g(y).$$

Al morfismo I_g lo llamamos conjugar por g.

De esta manera, el hecho de que un subgrupo H sea normal quiere decir que H *queda fijo* por todos los c_g. (En la práctica tienen para probar más cosas sobre éstos morfismos I_g.)

Observación 6. *Si H no es normal, entonces existe un $g \in G$ tal que $I_g(H) \subsetneq H$. En particular, $I_g(H)$ es un subgrupo de G* distinto *de H porque I_g es morfismo de grupos. A los grupos de la forma $I_g(H)$ decimos que son conjugados a H.*

Ejercicio 7 (Para hacer en casa)**.** Probar que los subgrupos conjugados a H son isomorfos a H.

Observar que el ejercicio anterior no afirma que "todo subgrupo es normal". Esto muestra que a veces hay que ser cuidadoso con el uso indiscrminado de la palabra "igual" como reemplazo de la palabra "isomorfo".

Otra cosa que uno asocia con la palabra cocientar es dividir, entonces surge la pregunta natural ¿que estamos multiplicando?

Ejercicio 8. Sean G y H dos grupos. Probar que $G \times 1 \lhd G \times H$ y que $G \times H/G \times 1$ es isomorfo a H.

Para cada elemento $(g, h) \in G \times H$ debemos ver que pasa pon $(g, h)G \times 1(g, h)^{-1}$. Para eso, recordemos que el producto de $G \times H$ es coordenada a coordenada y que por lo tanto $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. Entonces si tomamos $(g_0, 1) \in G \times 1$ tenemos que

$$(g, h)(g_0, 1)(g^{-1}, h^{-1}) = (gg_0g^{-1}, hh^{-1}) = (gg_0g^{-1}, 1).$$

Dado que gg_0g^{-1} es un elemento de G (por definición de grupo), obtenemos que

$$(g, h)(g_0, 1)(g, h^{-1}) \in G \times 1,$$

por lo que $G \times 1$ es normal.

Veamos ahora la segunda afirmación. Debemos ver que $G \times H/G \times 1$ es isomorfo a H. Hay varias maneras de hacer esto, pero lo haremos de la manera más manual posible: construiremos el isomorfismo a mano. Debemos asignarle a cada clase de equivalencia $[g, h]$ un elemento de H; lo más natural para esto debiera ser asignarle a $[g, h]$ el elemento h. Definimos entonces $\pi : G \times H/G \times 1 \to H$ por $\pi([g, h]) = h$.

Para ver que es un iso, primero debemos ver que está bien definida, que es morfismo de grupos y finalmente que es biyectiva.

Buena definición: Sea $[g,h]=[g',h']$ una clase de equivalencia dada por dos representantes distintos. Queremos ver que $h=h'$. Como las clases son iguales, debe ser que existe un elemento $(g_0,1)\in G\times 1$ tal que

$$(g',h')=(g,h)(g_0,1)=(gg_0,h).$$

Pero entonces, las segundas coordenadas son iguales.

Es morfismo: Sean $[g,h]$ y $[g',h']$ dos clases de equivalencia. Entonces tenemos

$$\pi([g,h]\cdot[g',h'])=\pi([gg',hh'])=hh'$$

$$\pi([g,h])\cdot\pi([g',h'])=hh'$$

Por lo que π es morfismo de grupos.

Es inyectiva: Ya vimos que para que sea inyectiva alcanza que el núcleo sea trivial; entonces calculemos $\ker\pi$. Sea $[g,h]\in\ker\pi$. Entonces $\pi([g,h])=h=1_H$ y por lo tanto $(g,h)\in G\times 1$, Esto implica que $[g,h]=[1,1]$. Es decir que $\ker\pi=\{[1,1]\}$.

Es sobreyectiva: Sea $h\in H$, entonces $\pi([1,h])=h$, entonces $\mathrm{Im}\pi=H$. $\square$

En la teórica ya vieron varios ejemplos distintos de cocientes. Veamos algunos más.

Ejercicio 9. Probar que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$.

Si bien este ejercicio también sale "a mano" como el ejercicio anterior, podemos utilizar el siguiente teorema

Teorema 10 (Primer teorema de isomorfismo)**.** *Sea $f:G\to H$ un morfismo de grupos. Entonces f* induce *un isomorfismo $G/\ker f\cong \mathrm{Im} f$.*

(Si no les queda claro el uso de la palabra «induce» en el teorema, no importa, cuando profundicemos sobre la propiedad universal del cociente va a quedar más claro).

Entonces lo que debieramos hacer es buscar una función sobreyectiva $f:\mathbb{R}\to S^1$ cuyo núcleo sea exactamente $\mathbb{Z}$. Es un ejercicio fácil mostrar que $f(x)=e^{2\pi ix}$ sirve. $\square$

El último ejemplo que quiero dar es el siguiente: ¿Hay alguna manera de agarrar un grupo G arbitrario y convertirlo en uno abeliano?

Definición 11. Sea G un grupo. Una *abelianización* de G es un grupo abeliano H de modo tal que existe un epimorfismo $\pi:G\to H$ y que si K es otro grupo abeliano y $\varphi:G\to K$ es un morfismo de grupos entonces existe un morfismo $\widetilde{\varphi}:H\to K$. Tal que vale $\varphi=\widetilde{\varphi}\circ\pi$

En algún sentido, la abelianización es la manera más grande de convertir a G en abeliano. No vamos a probar que existe con todo detalle, pero si lo vamos hacer en algunas clases.

Lo primero que nos podemos dar cuenta es que si G es un grupo cualquiera y H es abeliano, cualquier morfismo $\pi:G\to H$ cumple que

$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)=\pi(y)\pi(x)=\pi(yx)$$

O bien, esto es lo mismo que $\pi(xyx^{-1}y^{-1})=1$, o sea, $xyx^{-1}y^{-1}\in\ker\pi$.

Ejercicio 12 (Está en la práctica 2)**.** Probar que el subgrupo *generado* por los elementos

$$\{xyx^{-1}y^{-1}:x,y\in G\}$$

es normal. Este subgrupo se llama el *conmutador* de G y se nota como $[G,G]$.

Lo que podemos probar entonces es lo siguiente

Ejercicio 13. Sea G un grupo, entonces $G/[G,G]$ es abeliano.

Hagamos esto a mano. Tomamos dos clases $[x], [y]$ del cociente. Entonces

$$[x][y] = [xy] = [xy][1] = [xy][y^{-1}x^{-1}yx] = [xyy^{-1}x^{-1}yx] = [yx] = [y][x],$$

y por lo tanto $G/[G,G]$ es abeliano. $\square$

Aún no probamos que $G/[G,G]$ satisface las condiciones de ser una abelianización, pero notemos que filosóficamente debiera serla, ya que solo estamos haciendo triviales la menor cantidad de cosas posibles al cocientar.