Álgebra II - 2do Cuatrimestre 2018
Clase Práctica - 31/8

Parte 1: Cocientes

Enunciamos pasos útiles para comprender un cociente y a partir de ello intuir a qué grupo conocido es isomorfo. Antes de hacer esto formalizaremos la idea de sistema de representantes de una clase de equivalencia.

Definición 1 (Sistema de representantes)**.** Sean G y $H \leq G$. Un*sistema de representantes* de G/H es una función $\sigma : G/H \to G$ tal que $\sigma(c) = c$ para toda clase $c \in G/H$. Notar que σ es inyectiva.

En otras palabas, un sistema de representantes es dar para cada clase de equivalencia, un elemnento en dicha clase.

En general, cuando nos referimos a un sistema de representantes, nos referimos al conjunto X dado por la imagen de σ.

Usando que cocientar es una relación de equivalencia, se sigue que para todo $g \in G$, existe un único $x \in X$ tal que $[g] = [x]$ en G/H. Esto satisface nuestra idea intuitiva de que un "sistema de representantes" representa a cada clase de equivalencia con un único elemento. El ejemplo más común de ésto son los grupos $\mathbb{Z}/n$. Éstos están dados por un conjunto de clases de equivalencia de las cuales solemos elegir los representantes $X = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Dado un sistema de representantes X de G/H, podemos dotarle estructura de grupo a X vía $x * y = \sigma([x \cdot_G y])$.

Esto es exactamente lo que solemos hacer en $\mathbb{Z}/n$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}/6$, dado el conjunto de representantes $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, lo dotamos de una operación $+$ de modo tal que, por ejemplo, 4+3=1. Lo que hicimos realmente fue sumar 4 y 3 en $\mathbb{Z}$, obtuvimos 7 y devolvimos el representante de la clase de equivalencia de 7 que es 1.

Es importante notar que, a pesar de que $X \subseteq G$, con la estructura recién descripta X no es necesariamente un subgrupo de G pues estamos cambiando la operación con la que estamos trabajando.

Sin embargo, es útil dotar a un sistema de representantes con dicha estructura de grupo ya que obtenemos una descripción .ªmigable" con la que describir la estructura de G/H. Naturalmente, esto se sigue de que $\sigma : G/H \to X$ es un isomorfismo.

Vamos a utilizar la idea de tomar un sistema de representantes para calcular tres ejemplos de cocientes. $\mathbb{Z}/6$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$.

<u>Paso 1: Comprender la relación de equivalencia</u>

Recodemos que para un subgrupo normal $H \trianglelefteq G$, uno define la relación de equivalencia

$$x \sim y \mod H \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } x = y.h.$$

Analicemos esto para cada uno de los ejemplos que mencionamos.

En $\mathbb{Z}/6$,

$$a \sim b \mod 6 \Leftrightarrow \exists t \in 6\mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + t \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + 6k$$

En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$x \sim y \mod \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = y + k \Leftrightarrow \operatorname{dec}(x) = \operatorname{dec}(y)$$

(Aquí, $\mathrm{dec}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte decimal de x.)
En $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$,

$$z_1 \sim z_2 \mod \mathbb{R}^\times \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^\times \text{ tal que } z_1 = a.z_2$$

Esto sucede si y sólo si z_1 y z_2 están en la misma recta que pasa por el origen.
Paso 2: Elegir un sistema de representantes apropiado
Queremos elegir para cada clase de equivalencia, un elemento de la clase. En los ejemplos tenemos.
En $\mathbb{Z}/6$ podrían ser $X_1 = \{0,1,2,3,4,5\}$ o $X_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$ o $X_3 = \{-2,-1,0,1,2,3\}$.
En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ podrían ser $X_1 = [0,1)$ o $X_2 = (0,1]$ o $X_3 = [3,4)$.
En $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ podrían ser $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ y } \mathrm{Arg} z \in [0,\pi)\}$ o $X_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ y } \mathrm{Arg} z \in (-2,2]\}$.
Paso 3: Asignarle estructura de grupo al sistema de representantes
Como vimos antes, el sistema de representantes tiene estructura de grupo. En general podemos tratar de hacer ejemplos concretos para entender mejor la estructura. Usarmos algunos ejemplos del paso anterior para esto.
En $\mathbb{Z}/6$ con X_1 podemos hacer $4 * 3 = \sigma(4+3) = \sigma(7) = 1$.
En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con X_1 podemos hacer $2/3 * 1/2 = \sigma(2/3 + 1/2) = \sigma(7/6) = 1/6$.
En $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ con X_1 podemos hacer $i * \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \sigma(i(\frac{-1+i}{\sqrt{2}})) = \sigma(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
Paso 4: Conjeturar a que estructura conocida es isomorfa
A partir de la estructura de grupo en el sistema de representantes y comprender más o menos como ésta funciona, podemos intentar conjeturar alguna otra estructura conocida a la que sea isomorfa. Para probar que realmente son isomorfas debemos hallar un isomorfismo entre ambas.
Para $\mathbb{Z}/6$ ya lo entendemos bien.
Para $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y X_1 podemos tomar $f : X \to S^1$ como $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.
Para $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ y X_1 podemos tomar $f : X \to S^1$ como $f(x) = x^2$.
Estas funciones nos servirán para mostrar el isomorfismo que deseamos.
Paso 5: Corroborar el isomorfismo
Sea $\sigma : G/H \to X$ la aplicación que induce el sistema de representantes y $\pi : G \to G/H$ la proyección al cociente. Entonces $\varphi := \sigma \circ \pi : G \to X$ es la función que a cada $g \in G$ le asigna el único $x \in X$ tal que $[g] = [x]$. La ventaja es que suele ser más sencillo encontrar una fórmula explícita para φ que para y, con ayuda el primero teorema de isomorfismos, no nos importará . En los ejemplos:
En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \mathrm{dec}(x)$.
En $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} z/|z| & \text{si } \mathrm{Arg} z \in [0;\pi) \\ -z/|z| & \text{si no .} \end{cases}$$

Consideremos la composición

$$g := G \xrightarrow{\pi} G/H \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f}\to \tilde{G}$$

Es decir, $g = f \circ \varphi$. Lo que intentarmos mostrar es que g es un epimorfismo con núcleo H. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, tendremos que

$$\tilde{G} = \mathrm{Im}\, G \cong G/H$$

Suele ser más fácil probar que g es un morfismo con las propiedades pedidas que en realidad corroborar que f es un isomorfismo. La función f sólo sirve como paso intermedio para entender el cociente. Analicemos cada ejemplo.
En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con X_1 el candidato g resulta ser

$$g(x) = f(\varphi(x) = (\cos 2\pi \mathrm{dec} x, \sin 2\pi \mathrm{dec} x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

En $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ el candidato g resulta ser

$$g(z) = f(\varphi(x)) = z^2/|z|^2.$$

En ambos casos resulta fácil probar que g es morfismo sobreyectivo con el núcleo deseado correspondiente.

Parte 2: Clausura Normal y Torsión

Proposición 2. *Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto. Notemos $S = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X.*

i. El subgrupo S es normal en G si y sólo si para todo $g \in G$ se tiene que $gXg^{-1} \subseteq S$.

ii. El subgrupo S es carcterístico en G si y sólo si para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ se tiene que $\varphi(X) \subseteq S$.

Demostración. i.) La ida es trivial, veamos la vuelta. Sea $x \in S$. Entonces podemos escribir $x = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ con $x_i \in X$ y cada $\varepsilon_i = \pm 1$. Para cada $g \in G$ se tiene que

$$gxg^{-1} = gx_1^{\varepsilon_1}g^{-1}gx_2^{\varepsilon_2}g^{-1} \cdots gx_n^{\varepsilon_n}g^{-1}$$

Como cada factor pertenece a S pues $gXg^{-1} \subseteq S$ (y similarmente para las inversas), se tiene que $gxg^{-1} \in S$. Por lo tanto S es normal en G. ii.) Es una idea similar y es un ejercicio. $\square$

Clausura Normal

Ejercicio 3. Sean G un grupo y $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales en G. Entonces $\bigcap_{i\in I} K_i$ es normal en G.

Proposición 4. *Sean G un grupo y $S \leq G$ un subgrupo. Entonces*

$$\langle\langle S \rangle\rangle := \bigcap_{K \trianglelefteq G,\, K \supseteq S} K = \langle gsg^{-1} : g \in G, s \in S \rangle \trianglelefteq G$$

Dicho subgrupo la denominamos la clausura normal de S *y es el subgrupo normal (en G) más pequeño que contiene a S.*

Demostración. Por el ejercicio es claro que si vemos la igualdad, dicho grupo es normal en G. Debemos ver la igualdad de los grupos involucrados.
Veamos primero la inclusión de derecha a izquierda. Basta con ver que todos los generadores están en el lado izquierdo. Sean $g \in G$, $s \in S$ y $K \trianglelefteq G$ tal que $S \subseteq K$. Queremos ver que $gsg^{-1} \in K$. Como $S \subseteq K$ y K es normal $gsg^{-1} \in K$.

Para ver la inclusión de izquierda a derecha basta con notar que el conjunto de la derecha es un subgrupo normal y que contiene a S. Que contiene a S es claro pues, tomando $g = 1$ en la lista de generadores, los elementos de S son parte de los mismos.

Para ver que es normal, por la proposición anterior, alcanza ver que los generadores se mantienen por conjugaciones. Sea gsg^{-1} con $g \in G$ y $s \in S$ y sea $g_0 \in G$. Entonces $g_0gsg^{-1}g_0^{-1} = (g_0g)s(g_0g)^{-1}$, que es parte del conjunto de generadores.

Por lo tanto, el subgrupo de la derecha es parte de los grupos considerados en la interesección de la derecha y así, contiene a la intersección. □

Torsión de un grupo

Sea G un grupo, la *torsión* de G es es el subgrupo de G dado por

$$TG = \langle g \in G : \exists n \in N \text{ tal que } g^n = 1 \rangle$$

Observación 5. *Sea G un grupo.*

- *Si G es finito entonces $TG = G$.*
- *Si G es abeliano entonces $TG = \{g \in G : \exists n \in N$ tal que $g^n = 1\}$.*

Ejercicio 6. Sea G un grupo.

1. Probar que $TG \trianglelefteq G$. Más aún, TG char G.
2. Si G abeliano entonces $T(G/TG) = 1$.

Solución: 1.) Probaremos directamente que TG es característico, dado que ésto implica que sea normal. Por la proposición anterior basta con ver que los generadores son invariantes por automorfismos.

Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ y $g \in TG$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 1$. Entonces $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(1) = 1$, entonces $\varphi(g) \in TG$. Por lo tanto los generadores son invariantes por automorfismos como queríamos ver y así TG es característico.

2.) Sea $[g] \in G/TG$ tal que $[g]^n = 1$. Entonces $g^n \in TG$. Por la observación, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(g^n)^m = 1$. Entonces $g^{n.m} = 1$ y por lo tanto $g \in TG$, es decir que $[g] = 1$.