Álgebra II - 2do Cuatrimestre 2018

Clase Práctica - 25/9

La idea de la clase es tapar algunos huecos que quedaron en algunas clases con algunos ejemplos. Vamos a usar principalemnte cosas de acciones y los teoremas de Sylow

Ejercicio 1. Sean G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Sea $n = [G : H]$. Probar que existe $K \trianglelefteq G$ tal que $K \subseteq H$ y $[G : K] \mid n!$.

Solución: Consideremos G/H como conjunto, y tomemos la acción de G en G/H actuando a izquierda (con el cociente a derecha). Entonces hay un morfismo de grupos $\rho : G \to \mathbb{S}(G/H)$. Observemos además, que dicha acción no es trivial pues es transitiva.

Calculemos ahora $\ker \rho$. Si $\rho(g) = id_{G/H}$ significa que $g(xH) = xH$ para todo $x \in G$. Equivalentemente, para todo $x \in G$ existen h_1 y h_2 tal que $gxh_1 = xh_2$. En el caso particular que $x = 1_G$ se tiene que $g \in H$, por lo que $\ker \rho$ es un subgrupo de H. Por otro lado, usando el 1er Teorema de Isomorfismo, tenemos que $G/(\ker \rho) \cong \operatorname{Im} \rho$, por lo que $[G : \ker \rho] = |G/\ker \rho| = |\operatorname{Im} \rho| \mid |\mathbb{S}(G/H)| = n!$. Esto concluye lo que queríamos ver.

Ejercicio 2. Sean G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Supongamos que $[G : H] = p$ es el menor primo que divide a $|G|$. Probar que H es normal.

Solución: Usando el ejercicio anterior, existe un subgrupo $K \trianglelefteq G$ tal que $[G : K] \mid p!$ y que $K \subseteq H$. Por otro lado, dado que p es el menor primo que divide a $|G|$ y que los primos que aparecen en la factorización de $p!$ son todos menores o iguales a p, se sigue que $(|G| : p!) = p$. Dado $[G : K]$ divide a $|G|$ y a $p!$ (es no es 1 por ser mayor que $[G : H]$) se tiene que $[G : K] = p$. Por cardinalidad, se sigue que $H = K$ y por lo tanto H es normal.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de orden 24. Probar que tiene un subgrupo normal de orden 4 o uno de orden 8.

Solución: Aunque instintivamente pensaríamos que los teoremas de Sylow alcanzan para resolver el problema, rápidamente uno se da cuenta que existe la posibilidad de que existan 3 subgrupos de orden 8. Por eso analizamos otra manera. Sea P un subgrupo de orden 8 (por el 1er Teorema de Sylow, existe). Consideremos la acción de G en G/P por multiplicación a izquierda. Como G/P tiene cardinal $24/8 = 3$, esto nos dice que existe un morfimos de grupos $\rho : G \to \mathbb{S}_3$. Sea $K = \ker \rho$. De la misma manera que vimos antes, $K \subseteq P$.

Notemos además que por el 1er Teorema de Isomorfismo, $G/K \cong \operatorname{Im} \rho \leq \mathbb{S}_3$. En particular $|G|/|K|$ divide a $3! = 6$. Despejando, se ve que $|K|$ debe ser un múltiplo de 4. Dado que además K es un subgrupo de P, el orden de K puede ser 4 u 8.

Ejercicio 4. Sea G un grupo de orden 36. Probar que G no es simple.

Solución: Notemos que $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Usando el 3er teorema de Sylow, la cantidad de 3-subgrupos de Sylow pueden ser 4 o puede ser 1. Si hay un único, entonces es normal y por lo tanto G no es simple. Si hay 4, consideremos $\operatorname{Syl}_3(G)$ el conjunto de 3-subgrupos de Sylow y la acción de G en él por conjugación. Según el segundo teorema de Sylow, dicha acción no es trivial. Por otro lado, dado que $\operatorname{Syl}_3(G)$ tiene cardinal 4, existe un morfismo no trivial $\rho : G \to \mathbb{S}_4$. Sea $K = \ker \rho$. Por lo que dijimos antes $K \neq G$. Además ρ no puede ser inyectivo ya que $4! = 24 \leq 36$, entonces K es un subgrupo normal propio.

Ejercicio 5 (Para hacer en casa)**.** Sean p primo, $m < p$ y G un grupo de orden $p^k m$. Probar que G no es simple.

Ejercicio 6. Corroborar que no hay grupos no cíclicos de orden primo simples con orden menor que 60.

Teorema 7. *Sea $n \geq 5$. El grupo alternado $\mathbb{A}_n$ es simple.*

Observación 8. *Notar que $|\mathbb{A}_5| = 60$.*

Demostración. Para esta demostración vamos a usar dos hechos

- El grupo $\mathbb{A}_n$ está generado por los 3-ciclos.
- Dados dos ciclos de σ_1 y σ_2 igual longitud, éstos son conjugados en $\mathbb{S}_n$, es decir que existe $\rho \in \mathbb{S}_n$ tal que $\sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$.

Estas cosas se desprenden fácil de algunas cosas que hemos hecho con el grupo simétrico.

Sea $N \trianglelefteq \mathbb{A}_n$ un subgrupo normal no trivial. El objetivo será ver que $N = \mathbb{A}_n$, mostrando que $\mathbb{A}_n$ no tiene subgrupos triviales. La demostración se hace en dos pasos.

Paso 1. Supongamos que N posee un 3-ciclo.

Sean $\sigma \in N$ y $\sigma' \in \mathbb{A}_n$ dos 3-ciclos. Si vemos que σ' también está en N, como éste es arbitario, esto implica que todos los 3-ciclos estan en N. Por el hecho que nombramos arriba, esto implica que N posee todos los generadores de $\mathbb{A}_n$ y por lo tanto $N = \mathbb{A}_n$.

Según lo que dijimos antes, existe una permutación $\rho \in \mathbb{S}_n$ tal que $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$. A su vez, si vemos que podemos tomar la permutación $\rho \in \mathbb{A}_n$, como N es normal, lo anterior implicaría que $\sigma' \in N$. Supongamos entonces que $\rho \notin \mathbb{A}_n$. Como $n \geq 5$ existe una permutación τ tal que τ es disjunta con σ y por lo tanto σ y τ conmutan. Esto implica que

$$\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1} = \rho\tau\sigma\tau^{-1}\rho^{-1} = \rho\tau\sigma(\rho\tau)^{-1}.$$

Si $\rho \notin \mathbb{A}_n$, necesariamente se sigue que $\rho\tau \in \mathbb{A}_n$. Por lo tanto σ' y σ son conjugados en $\mathbb{A}_n$. Esto concluye este paso.

Paso 2. N siempre posee un 3-ciclo.

Sea σ un elemento no trivial de N que no es un 3-ciclo. Mostraremos que existe un elemento σ' no trivial que posee más puntos fijos que σ. Notemos que los 3-ciclos son exactamente los elementos con $n-3$ puntos fijos y todo elemento de $\mathbb{A}_n$ fija a lo sumo $n-3$. Entonces el procedimiento anterior nos permite conseguir elementos de N con cada vez más puntos fijos y por lo repiténdolo llegamos a un 3-ciclo.

El procedemos de la siguiente manera. Factorizamos σ como

$$\sigma = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_s$$

donde cada ρ_i es un ciclo y son todos disjuntos (en particular conmutan). Separamos en dos casos.

Caso 1. Algún $\rho_i = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_k)$ es un ciclo de longitud al menos 3

En este caso existen b_1 y b_2 que no son fijados por σ porque σ no es un 3-ciclo y $k \geq 3$ (notar por ejemplo que σ no puede ser un 4-ciclo ya que no sería par). Sea $\gamma = (a_3\ b_1\ b_2)$. Entonces

$$\sigma' := [\gamma, \sigma] = \gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$$

deja fijo a_2 además de las cosas que dejaba fijo σ. Notar además que $\sigma' \in N$ y no es trivial dado que γ y σ no conmutan.

Caso 2. Todos los ρ_i son transposiciones.

Consideremos entonces dos transposiciones $\rho_i = (a_1\ a_2)$ y $\rho_{i+1} = (a_3\ a_4)$. Pongamos $b_1 = a_4$ y b_2 cualquiera distinto de a_1, a_2, a_3 y a_4. Entonces si definimos γ y σ' como en el caso anterior tenemos que σ' fija a_1 y a_2. Puede ser que σ' deje de fijar b_2, pero el resto de los elementos que quedaban fijos siguen quedando fijos. Entonces σ' fija al menos un elemento más que σ. Las observaciones anteriores siguen valiendo: σ' no es trivial porque γ y σ no conmutan y además $\sigma' \in N$.

Esto finaliza la demostración.

$\square$