Álgebra 1 (turno mañana)
Clase 2 - Práctica 2 (Inducción)

Cristian Chaparro, Florencia Fernández Slezak, Magalí Giaroli

7 de septiembre de 2018

1. Inducción completa

Recordamos el Principio de Inducción:

> **Teorema.** *Sea P una proposición sobre todos los naturales. Si*
>
> **Caso base** *$P(1)$ es verdadera y*
>
> **Paso inductivo** *suponiendo que $P(n)$ es verdadera (la llamamos* hipótesis inductiva*), entonces $P(n+1)$ es verdadera.*
>
> *Entonces, $P(n)$ es verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.1. Ejemplos de que son importantes las dos partes de la prueba

Ejemplo 1. Aquí mostraremos un ejemplo donde si no vale el caso base se puede arribar a un resultado falso. Fue dejado al final de la clase pasada para que lo piensen.

Es claro que la proposición $P(n) : n^2 \geq n^2 + 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es falsa. Es más, no vale para ningún n natural, en particular para el caso base $n = 1$ es falsa. Sin embargo, es posible demostrar que vale el **paso inductivo**. Veámoslo:

Suponemos que vale que $n^2 \geq n^2 + 2$ (*hipótesis inductiva*), queremos ver que vale $(n+1)^2 \geq (n+1)^2 + 2$:

$$(n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 1 + 2 = \underbrace{n^2 + 2} + 2n + 1 \underset{(\text{HI})}{\leq} \underbrace{n^2} + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Luego, vale el paso inductivo ya que llegamos a que $(n+1)^2 + 2 \leq (n+1)^2$.

Ejemplo 2. Aquí mostraremos una proposición falsa donde vale el caso base pero no el paso inductivo. Consideremos la proposición $P(n) : 3^n \leq 100 \; \forall n \in \mathbb{N}$, que claramente es falsa.

Es fácil ver que vale el caso base, pues $P(1) : 3 \leq 100$ lo cual es verdadero. Es más, uno puede engañarse y ver que vale con varios naturales y concluir, erróneamente, que la proposición es verdadera $\forall n$. En este caso, si vamos probando con los primeros naturales la proposición resulta verdadera, más precisamente, $P(2), P(3), P(4)$ resultan todas verdaderas.

Lo que pasa es que no anda el paso inductivo, es decir, suponiendo que vale $P(n)$, ¿se puede asegurar que valga $P(n+1)$? La respuesta es no, y lo mostraremos simplemente con un contraejemplo. Más arriba dijimos que $P(4)$ es verdadera, si valiera el paso inductivo tendríamos que entonces $P(5)$ es verdadera, sin embargo la proposición $P(5) : 3^5 \leq 100$ es falsa.

2. Inducción corrida

Teorema. *Sean n_0 un entero y P una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si P satisface*

Caso base $P(n_0)$ *es verdadera y*

Paso inductivo *si $P(k)$ es verdadera para $k \geq n_0$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.*

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$, con $n \in \mathbb{Z}$.

2.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Pruebe que $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ para cada $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

En nuestro enunciado tenemos $n_0 = 2$ y $P(n) : \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, luego debemos probar que (caso base) $P(2)$ es verdadero y (paso inductivo) si $P(k)$ es cierto para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ entonces $P(k+1)$ es verdadero.

Para el caso base es suficiente reemplazar el valor $n = 2$ en $P(n)$ y verificar que se tiene la desigualdad:

$$\frac{4^2}{2+1} = \frac{16}{3} < 6 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{(2 \cdot 2)!}{(2!)^2}.$$

Luego $P(2)$ es verdadera. Ahora, veamos el paso inductivo: supongamos que $P(k)$ es verdadera para $k \geq 2$, lo que significa $\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ para $k \geq 2$, veamos que $P(k+1)$ es verdadera, para ésto notemos que

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

y

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{2(2k+1)}{(k+1)}.$$

Luego, si queremos ver $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}$ es suficiente probar que $\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{2(2k+1)}{(k+1)}$, que es lo mismo a probar $2(k+1)^2 - (2k+1)(k+2) < 0$. Desarrollando en lado izquierdo de la desigualdad obtenemos

$$2k^2 + 4k + 2 - (2k^2 + 5k + 2) = -k$$

Pero $k \geq 2$, luego $-k < 0$. Lo que prueba $P(k+1)$. Finalmente, por el principio de inducción corrida obtenemos que $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ para cada $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2. Pruebe que $\sum_{i=1}^{n} i! \geq 5 \cdot 2^{n-1} - 7$ para todo $n \geq 4$.

En este caso, tenemos $P(n) : \sum_{i=1}^{n} i! \geq 5 \cdot 2^{n-1} - 7$. Primero veamos que $P(4)$ (nuestro caso base) es verdadero. Reemplazamos $n = 4$ en $P(n)$ y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{4} i! = 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 = 5 \cdot 2^{4-1} - 7.$$

Luego, $P(4)$ es verdadera. Ahora, veamos el paso inductivo. Supongamos que $P(k)$ es verdadera para cierto $k \geq 4$, es decir, que $\sum_{i=1}^{k} i! \geq 5 \cdot 2^{k-1} - 7$, y probemos que $P(k+1)$ es verdadera. Tenemos:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i! = \sum_{i=1}^{k} i! + (k+1)! \geq 5 \cdot 2^{k-1} - 7 + (k+1)!,$$

por hipótesis inductiva. Alcanza con ver que

$$5 \cdot 2^{k-1} - 7 + (k+1)! \geq 5 \cdot 2^{k} - 7.$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$(k+1)! \geq 5 \cdot (2^k - 2^{k-1}) = 5 \cdot 2^{k-1},$$

y desarrollando, nos queda que:

$$(k+1) \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2}_{k-1 \text{ factores}} \cdot 1 \geq 5 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}_{k-1 \text{ factores}}.$$

Como $k+1 \geq 5$ y cada uno de los $k-1$ factores marcados en el lado izquierdo de la desigualdad es mayor o igual a 2, la desigualdad es verdadera. Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadera, y completamos el paso inductivo.

Ejemplo 3. Probar que $3n^2 + 3n + 1 < n! \cdot n$ para $n > 3$.

Veamos que es cierto para $n = 4$: $3(4)^2 + 3(4) + 1 = 61 < 96 = (4)!4$. Ahora, supongamos que el resultado se cumple para k, veamos que el resultado es cierto para $n = k+1$. Por hipótesis de inducción $3k^2+3k+1 < k!k$ y sumando a ambos lados $6k + 6$ obtenemos:

$$3k^2 + 3k + 1 + 6k + 6 < k!k + 6k + 6,$$

que es lo mismo a

$$3k^2 + 6k + 3 + 3k + 3 + 1 < k!k + 6k + 6,$$

factorizando

$$3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 < k!k + 6(k + 1).$$

Utilizando el hecho de que $k < (k + 1)$ se obtiene

$$3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 < k!(k + 1) + 6(k + 1) = (k + 1)(k! + 6),$$

ahora, como $k \geq 4$ tenemos que $6 < 4 \cdot 4 \leq k \cdot k \leq k \cdot k!$. Sumamos a ambos lados $k!$ tenemos $6 + k! \leq k \cdot k! + k!$ y por tanto

$$3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 < (k + 1)(k! + 6) \leq (k + 1)(k \cdot k! + k!).$$

Distribuyendo al lado derecho obtenemos

$$3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 < k(k + 1)! + (k + 1)!$$

Es decir

$$3(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 1 < (k + 1)(k + 1)!$$

Que es lo deseado. De esta forma si $n \geq 4$ entonces $3n^2 + 3n + 1 < n! \cdot n$.

3. Inducción global

Teorema. *Sean n_0 un entero y P una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si P satisface*

Caso base *$P(n_0)$ es verdadera y*

Paso inductivo *si k es un entero arbitrario mayor o igual que n_0 tal que $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ... y $P(k)$ son verdaderos, entonces $P(k+1)$ también lo es.*

Entonces, $P(n)$ es verdadera para cualquier entero $n \geq n_0$.

Ejemplo 1. Pruebe que cualquier envío postal cuyo valor es de n (≥ 2) centavos puede hacerse con estampillas de dos y tres centavos.

Sea $P(n)$ el enunciado que afirma que cualquier envío postal cuyo valor es de n centavos puede hacerse con estampillas de dos y tres centavos.

Caso base: (Note que $n_0 = 2$) Dado que un envío de dos centavos se puede hacer con una estampilla de dos centavos, $P(2)$ es verdadero. Del mismo modo obtenemos que $P(3)$ es también verdadero.

Paso inductivo: Supongamos que $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$,..., y $P(k)$ son verdaderos, es decir, cada envío postal de dos centavos hasta de k centavos puede hacerse con estampillas de dos y tres centavos. Para mostrar que $P(k+1)$ es verdadero, consideremos un envío postal de $k+1$ centavos. Puesto que $k+1 = (k-1)+2$, un envío de $k+1$ centavos puede formarse con estampillas de dos y tres centavos si el envío de $k-1$ centavos puede realizarse con estampillas de dos y tres centavos. Como $P(k-1)$ es verdero por la hipótesis de inducción, esto implica que $P(k+1)$ también es verdadero.

De ahí, por la versión global de inducción, $P(n)$ es cierto para cada $n \geq 2$, es decir, cualquier envío postal de $n(\geq 2)$ centavos se puede hacer con estampillas de dos o tres centavos.

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(1) = 3$$
$$f(n+1) = \begin{cases} \frac{[2f(\frac{n+1}{2})]^2}{n+1} & \text{si } n+1 \text{ es par,} \\ 3^{n+1} + 3f(n) & \text{si } n+1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Pruebe que $f(n) = n3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En este caso $P(n) : f(n) = n3^n$. Tenemos que $f(1) = 3 = 1 \cdot 3^1$, así que el caso base $P(1)$ es verdadero. Dado que la fórmula de f para cierto n involucra usar los valores que toma f en números menores que n (y no siempre el número inmediatamente anterior), vamos a usar el principio de inducción global. Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $P(k)$ es verdadera para todo $1 \leq k \leq n$, y veamos entonces que $P(n+1)$ es verdadera.

Separemos en dos casos:

$\underline{n+1 \text{ impar:}}$ Usando la fórmula de f y la hipótesis inductiva nos queda que:

$$f(n+1) = 3^{n+1} + 3f(n) = 3^{n+1} + 3n3^n = 3^{n+1} + n3^{n+1} = (n+1)3^{n+1},$$

por lo que $P(n+1)$ es verdadero.

$\underline{n+1 \text{ par:}}$ En este caso, tenemos que

$$f(n+1) = \frac{[2f(\frac{n+1}{2})]^2}{n+1}.$$

Observemos que como $n \geq 1$, $\frac{n+1}{2} \leq n$, por lo que por hipótesis inductiva $P(\frac{n+1}{2})$ es verdadera, es decir, $f(\frac{n+1}{2}) = (\frac{n+1}{2})3^{(\frac{n+1}{2})}$. Usando esto nos queda:

$$f(n+1) = \frac{[2(\frac{n+1}{2})3^{(\frac{n+1}{2})}]^2}{n+1} = \frac{[(n+1)3^{(\frac{n+1}{2})}]^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2\,3^{n+1}}{n+1} = (n+1)3^{n+1},$$

que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto, por el principio de inducción global, $f(n) = n3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.