Análisis Numérico - Recuperatorio - Segundo cuatrimestre de 2018 (10/12/2018)

Nombre y Apellido	1	2	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

Problema 1

Considerar el problema

$$\begin{cases} -u''(x) + \varepsilon u' &= f(x) \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 2 \end{cases}$$

(a) Dar la formulación débil del problema en el espacio apropiado V.

(b) Suponiendo que la solución débil u es C^2, probar que u es solución del problema clásico.

(c) Para el problema discreto, definir, sobre una malla uniforme, un espacio $V_h \subset V$ de funciones continuas y lineales a trozos acorde a las condiciones de contorno. Dar una base de V_h.

Problema 2

Considerar el problema $-\Delta u + u = f$ en Ω, con datos de contorno $u = 0$ en $\Gamma_D \subset \partial\Omega$, y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$ en $\Gamma_N \subset \partial\Omega$, siendo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

(a) Dar la formulación débil del problema.

(b) Probar existencia y unicidad de solución débil.

(c) Considerar Ω el triángulo de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$. Graficar la triangulación $\mathcal{T}_h$ dada por las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}^t,$$

indicando la numeración de los nodos y de los triángulos.

(d) Tomando $\Gamma_D = \{(0,y) : 1 \leq y \leq 2\}$, sea $V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_{\Gamma_D} = 0\}$ y $B = \{\phi_i\}_{i=1}^4$ la base nodal de V_h. Dar las función ϕ_4.

(e) Si M es la matriz de rigidez, calcular el casillero $M_{2,3}$.