Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2018

Práctica N° 6: Elementos Finitos.

Ejercicio 1 Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de H^1 se deriva de un producto escalar.

Ejercicio 2 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?

ii) ¿Cómo definiría una solución débil?

iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 3 Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1, tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u + u &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) Defina solución clásica y débil para este problema.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que existe una solución única en $H^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 4 a) Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, probar que existe una constante C_0 tal que, para toda $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\triangle u & = & f & \text{en } \Omega \\ u & = & 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & g & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{array} \right.$$

con $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ y $\Gamma_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$.

i) Definir solución clásica y débil en un espacio adecuado $V \subset H^1(\Omega)$.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

Ejercicio 5 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\chi_i\chi_j \geq \alpha|\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha 0$$

Sea también $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$. Se busca una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\left\{ \begin{array}{c} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

i) Defina solución clásica y débil para este problema.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que para $a_0(x) \geq 0$ en Ω y $f \in L^2$ existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 6 Dar dos ejemplos de formas bilineales $(a_{i,j})$ diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

Ejercicio 7 Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Sea T_h una subdivisión de Ω en elementos K (intervalos en $\mathbb{R}$, triángulos o cuadriláteros en $\mathbb{R}^2$, tetraedros en $\mathbb{R}^3$). Probar que una función definida en todo Ω y que es polinomial en cada elemento, pertenece a $H^1(\Omega)$ si y sólo si es continua en Ω.

Ejercicio 8 Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento K en $\mathbb{R}^2$:

i) funciones lineales

ii) funciones cuadráticas

iii) $P_r = \{v \ : \ v|_K$ es un polinomio de grado $\leq r \}$

iv) funciones bilineales ($v = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$).

Ejercicio 9 Sea C_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, una subdivisión de Ω en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

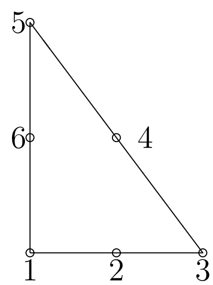
i) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, lineales en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω). Verificar que la función resulta continua.

ii) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω) y en el punto medio de cada lado de los elementos de C_h.

Ejercicio 10 Sea T_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de T_h.

i) Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos n_j, $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i, $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.

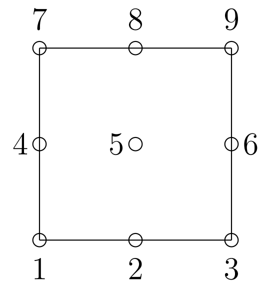


Ejercicio 11 Sea Q_h una na subdivisión en rectángulos Q, con lados paralelos a los ejes coordinados de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, tal que en cada rectángulo es una función de $Q_2 = \{v : v = \sum c_j p_j(x) q_j(y)\}$ donde p_j y q_j son polinomios de grado menor o igual a 2.

i) Explicar cómo elegiría los nodos en cada rectángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el rectángulo de referencia $[0,1]^2$ y los nodos n_j, $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i, $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.

Ejercicio 12 Consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con borde poligonal, y T_h una triangulación del mismo. Sea $K \subset T_h$ un triángulo de la partición. Llamamos:
$h_K =$ mayor de los lados de K,
$\rho_K =$ diámetro del círculo inscripto en K,
$h = \max_{K \in T_h} h_K$.



Probar que la condición $\dfrac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$ es equivalente a que exista $\theta_0 > 0$ tal que para cualquier ángulo θ de cualquier triángulo $K \in T_h$ se tiene $\theta \geq \theta_0$ (esta condición es conocida como "condición del ángulo mínimo").

Ejercicio 13 Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión C_h de Q en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea V_h el conjunto de funciones continuas definidas en Q, bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de V_h está unívocamente determinado por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los nodos en el borde de Q).

Ejercicio 14 Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde $\hat{T}$ es el triángulo de referencia que tiene vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$.

a) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{2} f\Big(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\Big)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

b) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{1}{6}\bigg(f\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) + f\Big(0, \frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\bigg)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 15 Sea T un triángulo genérico (no degenerado) de vértices a_1, a_2, a_3. Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ la transformación afín que transforma $\hat{T}$ en T. Usando el ejercicio 14 a) y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x) dx \sim |T| f(a_{123}),$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 16 Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 14 b), mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{3}\Big(f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23})\Big)$$

donde $a_{ij}, i < j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 17 i) Considerar el tetraedro de referencia:

$$\hat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ y $\hat{a}_4$ son los vértices de $\hat{T}$ Probar que la cuadratura:

$$\hat{Q}(f) = \frac{1}{6} f(\hat{a}_{1234}), \qquad \text{siendo } \hat{a}_{1234} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4}{4}$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

ii) Probar que el volumen de un tetraedro con vértices: el origen, A, B y C viene dado por:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

siendo x_A la coordenada x del vértice A, etc.

iii) Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el tetraedro con vértices a_1, a_2, a_3, a_4. Deducir, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre T que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 18 i) Dado un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, definimos $\mathcal{Q}_1 = \{f(x, y) = p(x)q(y), \quad p, q|_R \in \mathcal{P}_1\}$. Probar que la cuadratura

$$\int_R f \sim \frac{|R|}{4}\Big(f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)\Big)$$

es exacta para $f \in \mathcal{Q}_1$.

iii) Considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \ \text{ si } (x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [0, 1] \\ \quad u(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

y la partición $\Omega = R_1 \cup R_2$, donde $R_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$ y $R_2 = [0, 1]^2$. Escribir las bases locales de $\mathcal{Q}_1$ sobre R_1 y R_2 (teniendo en cuenta los datos de borde), y calcule la matriz de rigidez usando la cuadratura del ítem anterior.

Ejercicio 19 Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson $-\triangle u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = 0$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h.

Ejercicio 20 Hacer un programa para resolver la ecuación $-\triangle u + u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = g$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h.

Ejercicio 21 (a) Considere el tetraedro de referencia:

$$\widehat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los vértices de $\widehat{T}$, determine valores w_1, w_2, w_3 y w_4 de manera que la cuadratura:

$$\int_{\widehat{T}} f \sim \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i)$$

sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (Sug.: aproveche las simetrías del problema para simplificar las cuentas).

(b) Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el tetraedro con vértices a_1, a_2, a_3, a_4. Deduzca, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre T que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

(c) ¿Qué dimensión tiene $\{v : v|_T \in \mathcal{P}_1\}$?

(d) Pruebe que todo polinomio de $\mathcal{P}_1$ queda unívocamente determinado por su valor en las esquinas de $\widehat{T}$.

Ejercicio 22 Dada $f \in L^2(0, 1)$ $0 < \alpha \leq 1$, considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' &= f \qquad \text{en} \ \ (0,1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0. \end{cases}$$

(a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución.

(b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio $V_h \subset V$ en dónde

$$V_h = \{v \in V : v|_I \in \mathcal{P}_1\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean u la solución del Problema Variacional y u_h la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \to 0.$$

(c) Asumiendo que $u \in H^2(0, 1)$ y que existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(0,1)} \leq c\|f\|_{L^2(0,1)}$, probar que se tiene convergencia cuadrática en $L^2(0, 1)$, es decir, que existe $k > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq kh^2\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Ejercicio 23 Dado $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado Lipschitz con frontera poligonal, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ considerar el problema:

$$\begin{cases} -\triangle u + u &= f \qquad \text{en} \ \ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \qquad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

(a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución. Probar que la solución clásica es solución del problema variacional.

(b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio $V_h \subset V$ en dónde

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in \mathcal{P}_1\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean u la solución del Problema Variacional y u_h la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

(c) Probar que se tiene convergencia cuadrática en $L^2(\Omega)$.

Sug: Usar Aubin-Nitsche y el siguiente resultado:

Regularidad de solución y Estimación a priori: Dada $F \in L^2(\Omega)$, y w la solución del problema $-\triangle w + w = F$, con condiciones de borde Dirichlet y/o Neumann homogéneas, entonces es sabido que $w \in H^2(\Omega)$ y que existe $C > 0$ tal que $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|F\|_{L^2(\Omega)}$.