Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2018

TP N° 2 - B: Convección-Difusión

Considerar el problema de convección-difusión:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \alpha \Delta_x u(x,t) - \mathbf{v}(x) \cdot \nabla_x u(x,t) \qquad x \in \Omega,\ t \in [0,T] \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

La incógnita u puede interpretarse como la concentración de una cierta sustancia quimíca en un medio. El término $\alpha \Delta_x u$ describe la difusidad: un punto de alta densidad, tenderá a difundir concentración hacia su entorno. α es un coeficiente positivo que modela la difusividad de la sustancia en el medio. El término de transporte $\mathbf{v} \cdot \nabla u$ modela el movimiento del medio, que traslada la sustancia. $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades. La condición de Neumann implica que no hay flujo hacia el exterior, es decir: que la cantidad total de sustancia se mantiene constante.

Formular el problema (1) de manera débil e implementar un algoritmo que lo resuelva, tomando $\Omega = B(0,1)$.

Estudiaremos dos variantes para $\mathbf{v}$:

- $\mathbf{v} = v(x,y) = (-y, x)$.
- $\mathbf{v} = v(x,y) = (-y, x)/\|(x,y)\|$.

En ambos casos $\mathbf{v}$ corresponde a un movimiento circular. Tomaremos también dos casos para las condiciones de contorno:

- Problema de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en $\partial\Omega$.
- Problema de Dirichlet: $u = 0$ en $\partial\Omega$.

En el primer caso la sustancia no puede escapar del dominio. El problema puede pensarse como la disolución de azúcar en una taza, al revolver. En el segundo caso, la sustancia medida por u tiene un valor fijo sobre el borde. Puede pensarse como la disipación de calor al revolver (suponiendo que el cuerpo de la taza se mantiene a temperatura constante).

Elegir algún dato inicial g y graficar la solución en función del tiempo.

1 Formulación Discreta

Dada una triangulacion $\mathcal{T}_h$ de Ω, considerar el espacio V_h de funciones continuas y lineales en cada triángulo. Llamemos $\{\phi_i\}_i$ a la base nodal de V_h. La discretización de la formulación débil del problema conduce a la necesidad de calcular la matriz de masa A, de rigidez B y la matriz correspondiente al término convectivo C, dadas por:

$$A_{i,j} = \int_\Omega \phi_i \phi_j \qquad B_{i,j} = \int_\Omega \nabla\phi_i \nabla\phi_j \qquad C_{i,j} = \int_\Omega (\mathbf{v} \cdot \nabla\phi_j)\phi_i$$

Con esta notación el problema discreto es:

$$(A + dt(B + C))U^{n+1} = AU^n$$

donde dt es el paso temporal y U^n es el vector de coeficientesde u_h a tiempo n.

Es conveniente hacer un programa auxiliar que, dados los datos de la triangulación, calcule las matrices A, B y C.

2 Gráficos

Es conveniente mirar los gráficos desde arriba (como un dibujo plano). Para ello, agregar la sentencia: `view([0,-90])`.