ECUACIONES MAS GENERALES

MUCHAS DE LAS CONCLUSIONES OBTENIDAS PARA EL PROBLEMA DE "JUGUETE" $u_t = u_{xx}$ SE EXTIENDEN A CASOS MAS GENERALES:

1) $u_t = k(x,t)\, u_{xx}$
2) $u_t = (k(x,t)\, u_x)_x$ EC. EN FORMA DE DIVERGENCIA
3) $u_t = k(u)\, u_{xx}$ NO LINEAL
4) $u_t = u_{xx} + f(u)$ NO LINEAL
5) OTRAS CONDICIONES DE CONTORNO

1) $\begin{cases} u_t = k(x,t)\, u_{xx} \\ u(a,t) = 0 = u(b,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$ ELEGIMOS UN METODO: POR EJEMPLO CRANK-NICOLSON

COMO DISCRETIZAR $k(x,t)$?

PROPONGO:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \overbrace{K\left(x_j, t_n + \tfrac{\Delta t}{2}\right)}^{K_j^{n+1/2} \leftrightarrow \text{NOTACIÓN}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right)\right)$$

TIENE SENTIDO LA IDEA PORQUE C-N TIENE MAS ORDEN QUE EN LOS CASOS $\theta \neq 1/2$. SI EVALÚO K EN (x_j, t_n) PIERDO ORDEN.

ANALIZO TRUNCADO: (INFORMAL Y RAPIDO)

$$\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t^{n+1})}{\Delta x^2} =$$

$$= u_{xx}(x_j, t_{n+1}) + O(\Delta x^2) = A$$

ANALOGAMENTE

$$\frac{u(x_j, t_n) - 2u(x_j, T_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} = u_{xx}(x_j, T_n) + O(\Delta x^2) = B$$

C-N TRICK: $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\left[u_{xx}(x_j, t_{n+1/2}) - u_{txx}(x_j, T_{n+1/2})\frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)\right]$

$+ \frac{1}{2}\left[u_{xx}(x_j, t_{n+1/2}) + u_{txx}(x_j, t_{n+1/2})\frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)\right]$

EN DEFINITIVA

$$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B = u_{xx}(x_j, t_{n+1/2}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$$

POR OTRO LADO: $\dfrac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\Delta t} = u_t(x_j,t_{n+1/2}) + O(\Delta t^2)$

EL ESQUEMA PROPUESTO RESULTA:

$$T_j^n = \underbrace{u_t(x_j,t_{n+1/2}) + O(\Delta t^2) - k(x_j,t_{n+1/2})\, u_{xx}(x_j,t_{n+1/2})}_{} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

ESTOS DAN CERO PORQUE
u RESUELVE LA ECUACIÓN

$T_j^n \sim O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \longrightarrow$ NO PIERDO ORDEN

CONVERGENCIA ? LA CONVERGENCIA EN NORMA INFINITO SE PUEDE PROBAR CON LAS MISMAS IDEAS DEL CASO BÁSICO $u_t = u_{xx}$.

TENEMOS EL ESQUEMA:

$$(1+k_j^{n+1/2}\nu)\,u_j^{n+1} = \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu\, u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2} u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu\, u_{j+1}^{n} + (1-k_j^{n+1/2}\nu)u_j^n + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu\, u_{j-1}^n$$

SUP. QUE $1 + k_j^{n+1/2}\nu \geq 0$ (O SEA, $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \nu \leq \frac{1}{k_j^{n+1/2}}$) $\forall\, j, n$

Y SE OBTIENE LA ESTABILIDAD COMO ANTES

$$(1+k_j^{n+1/2}\nu)|u_j^{n+1}| \leq \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu|u_{j-1}^{n+1}| + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}|u_{j+1}^{n+1}| + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu|u_{j+1}^{n}| + (1-k_j^{n+1/2}\nu)|u_j^n| + \frac{1}{2}k_j^{n+1/2}\nu|u_{j-1}^n|$$

LUEGO:

$$(1+k_j^{n+1/2}\nu)|u_j^{n+1}| \leq \nu k_j^{n+1/2}\|u^{n+1}\|_\infty + \|u^n\|_\infty$$

Y DE ACÁ PUEDE VERSE COMO ANTES QUE

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$

ESTA DESIGUALDAD, JUNTO CON EL TRUNCADO Y LA ECUACIÓN

DEL ERROR PERMITEN DEMOSTRAR CONVERGENCIA

2) CUANDO LA ECUACIÓN TIENE FORMA DE DIVERGENCIA, ES COMÚN INTENTAR UNA DISCRETIZACIÓN DIRECTA

Ej. CASO EXPLÍCITO :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} \simeq \overbrace{\left[\frac{k^n_{j+1/2}\, u_x(x_{j+1/2},t_n) - k^n_{j-1/2}\, u_x(x_{j-1/2},t_n)}{\Delta x}\right]}^{\text{CENTRADA}}$$

AHORA VUELVO A HACER CENTRADAS PARA LAS DERIVADAS PRIMERAS:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} = \frac{k^n_{j+1/2}\left(u^n_{j+1}-u^n_j\right) - k^n_{j-1/2}\left(u^n_j - u^n_{j-1}\right)}{\Delta x^2}$$

EN DEFINITIVA QUEDA

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} = \frac{k^n_{j+1/2}\, u^n_{j+1} - \left(k^n_{j+1/2} + k^n_{j-1/2}\right) u^n_j + k^n_{j-1/2}\, u^n_{j-1}}{\Delta x^2}$$

OBVIAMENTE LA ESTABILIDAD EN $\| \, \|_\infty$ SALE NUEVAMENTE SI SE PIDE QUE

$$1 \geq \nu \left(k^n_{j+1/2} + k^n_{j-1/2}\right) \quad \forall\, j, n \qquad (*)$$

EJERCICIO: CALCULE TRUNCADO Y PRUEBE CONVERGENCIA BAJO LA CONDICIÓN (*).

3). AQUÍ APARECE UN TÉRMINO NO LINEAL.

DISCRETIZACIONES ?

PARA EL EXPLÍCITO, LA OPCIÓN ES OBVIA:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} = k(u^n_j)\left[\frac{u^n_{j+1} - 2u^n_j + u^n_{j-1}}{\Delta x^2}\right]$$

Que pasa si quiero C-N?

Podría hacer

OBVIAMENTE LA OPCIÓN CORRECTA PARA NO PERDER EL ORDEN.

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \underbrace{k\left(u_j^{n+1/2}\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right)}{\Delta x^2}+\frac{1}{2}\frac{\left(u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n}\right)}{\Delta x^2}\right]$$

PROBLEMA: QUE ES ESTO? → OTRA INCOGNITA

INTENTO USAR OTRA COSA

$k\left(\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}\right)$, QUIERO VER CUANTO DIFIERE

PERO $\frac{g(t+\Delta t)+g(t)}{2} = g(t+\Delta t/2) + O(\Delta t^2)$ (EJERCICIO)

LUEGO, ESPERO

$$\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2} = u_j^{n+1/2} + O(\Delta t^2)$$

EN REALIDAD ME INTERESA SABER CUANTO PIERDO SI USO $k\left(\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}\right)$ EN VEZ DE $k\left(u_j^{n+1/2}\right)$

HIPOTESIS SOBRE $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (DE PASO RECUERDO QUE SIEMPRE DEBE SER POSITIVA SINO LA EC. ES ANTI-DIFUSIVA Y NI SIQUIERA ES ESTABLE EL PROBLEMA CONTINUO)

CTE. DE LIPSCHITZ

PIDO $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ LIPSCHITZ $|K(x)-K(y)| \leq L|x-y|$

EN ESE CASO VEMOS TRIVIALMENTE QUE

$$k\left(\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2}\right) - k\left(u_j^{n+1/2}\right) \sim O(\Delta t^2)$$

EJERCICIO: VER QUE C-N CON ESTA ELECCIÓN CONSERVA EL TRUNCADO

PREGUNTA: CONVERGE? → + DIFICIL DE PROBAR

4) CASO CON FUENTE NO-LINEAL $\quad u_t = u_{xx} + f(u)$

CASO EXPLÍCITO:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)}{\Delta x^2} + f(u_j^n)$$

TRUNCADO: $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ (TRIVIAL)

ECUACIÓN DE ERROR?

$$e_j^{n+1} = e_{j+1}^n \nu + (1-2\nu)\, e_j^n + e_{j-1}^n \nu + \overbrace{\left(f(U_j^n) - f(u_j^n)\right)}^{\text{NO LINEAL}} \Delta t + \overbrace{T_j^n}^{\text{TRUNCADO}} \Delta t$$

PIDO ALGO RAZONABLE SOBRE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: LIPSCHITZ

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$$

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty (1 + \Delta t L) + \Delta t\, \underbrace{T}_{\text{PEOR TRUNCADO}} \leq$$

$$\leq \left[\left(\|e^{n-1}\|_\infty (1 + L\Delta t) + \Delta t T\right)(1 + L\Delta t) + \Delta t T\right] \leq$$

$$\leq \|e^0\|_\infty (1 + L\Delta t)^{n+1} + \Delta t\, T \left(\sum_{i=0}^{n} (1 + \Delta t L)^i\right)$$

ENTONCES

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty (1 + L\Delta t)^{n+1} + \cancel{\Delta t}\, T \, \frac{\left[(1 + \Delta t L)^{n+1} - 1\right]}{\cancel{\Delta t} L}$$

COMO $(1 + L\Delta t)^{n+1} = \left[\underbrace{(1 + \Delta t L)^{\frac{1}{\Delta t L}}}_{\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} e}\right]^{\underbrace{\Delta t L (n+1)}_{\to \text{ ACOTADO POR } T_f}}$

LUEGO EL MÉTODO CONVERGE.

¿QUÉ PASA SI QUIERO MÁS ORDEN? → C-N

EN VEZ DE $f(u_j^n)$ USO $f\left(\frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}\right)$

EJERCICIO: VER OTRAS ALTERNATIVAS $\frac{f(u_j^n) + f(u_j^{n+1})}{2}$?

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2}\right) + f\left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\right)$$

TRUNCADO ES TRIVIALMENTE $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$

BUSCO ECUACIÓN DEL ERROR $e_j^n = U_j^n - u_j^n$

$$(1+\nu)\, e_j^{n+1} = \frac{\nu}{2} e_{j+1}^{n+1} + \frac{\nu}{2} e_{j-1}^{n+1} + \frac{\nu}{2} e_{j+1}^{n} + (1-\nu)\, e_j^n + \frac{\nu}{2} e_j^n + \Delta t \left[f\left(\frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\right) \right] + \Delta t\, T_j^n$$

COMO ES USUAL IMPONGO UNA RESTRICCIÓN $1 - \nu \geq 0$

$$(1+\nu)\, e_j^{n+1} \leq \nu \|e^{n+1}\|_\infty + \|e^n\|_\infty + \frac{\Delta t}{2} L \left(\|e^{n+1}\|_\infty + \|e^n\|_\infty \right) + T \Delta t$$

$$\|e^{n+1}\|_\infty \underbrace{\left(1 - \Delta t \frac{L}{2}\right)}_{\text{PUEDO ASUMIR } \geq 0 \text{ PUES } \Delta t \to 0} \leq \|e^n\|_\infty \left(1 + \Delta t \frac{L}{2}\right) + \Delta t\, T$$

EN DEFINITIVA

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty \underbrace{\frac{(1 + \Delta t L/2)}{(1 - \Delta t L/2)}}_{Q} + \Delta t \frac{T}{(1 - \Delta t L/2)} \to \tilde{T}$$

ITERANDO

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty Q^{n+1} + \Delta t \, \tilde{T} \left(\frac{Q^{n+1} - 1}{Q - 1} \right)$$

Y TODO SALE COMO ANTES PUES

$\left(1 + \Delta t \, L/2\right)^{n+1}$ Y $\left(1 - \Delta t \, L/2\right)^{n+1}$ CONVERGEN

RESPECTIVAMENTE A LIMITES ACOTADOS.