Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Numérico

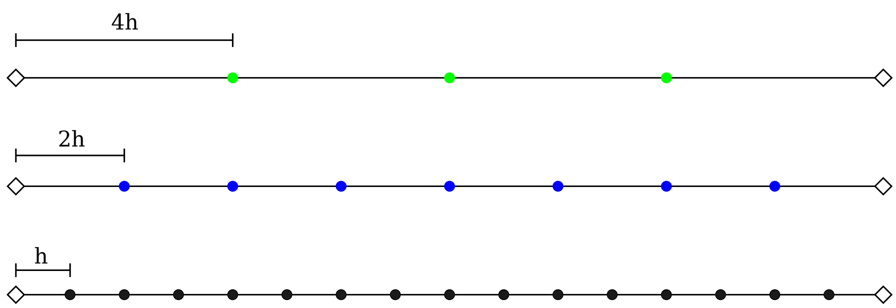
Segundo Cuatrimestre 2018

TP 1 - Tema 2: Método Multigrilla

El objetivo de este trabajo es implementar un método multigrilla con K grillas, para resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \alpha u' + \beta u = f & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

En la siguiente figura mostramos la relación entre grillas para $K = 3$.



Notamos $\mathcal{M}_k$ a la malla con paso $2^k h$: así, $\mathcal{M}_1$ será la malla más fina y $\mathcal{M}_K$ la más gruesa. Análogamente, notamos P_{k+1}^k a la matriz de prolongación de $\mathcal{M}_{k+1}$ a $\mathcal{M}_k$, y R_k^{k+1} a la matriz de restricción de $\mathcal{M}_k$ a $\mathcal{M}_{k+1}$. A su vez, A^k es la matriz del sistema en la malla $\mathcal{M}_k$. Observar que valen:

$$R_k^{k+1} = \frac{1}{2}(P_{k+1}^k)^t$$

$$A^{k+1} = R_k^{k+1} A^k P_{k+1}^k$$

El método multigrilla propuesto consiste en:

1. Definir u^1 de manera aleatoria.

2. Suavizar u^1 resolviendo: $A^1 u^1 = b$.

3. Iterar sobre el índice $k = 2, \dots, K$:

   - Calcular r^k, la restricción del residuo r^{k-1} a la malla $\mathcal{M}_k$.
   - Suavizar r^k resolviendo: $A^k u^k = r^k$.

4. Resolver el sistema $A^K u^K = r^K$

5. Iterar sobre el índice $k = K-1, \dots, 1$:

   - Corregir la solución en k: $u^k = u^k + P_{k+1}^k u^{k+1}$.

- Suavizar u^k resolviendo: $A^k u^k = r^k$

Tanto los suavizados como la resolución en la malla más gruesa se realizan aplicando el método de Jacobi con peso ω.

Para la implementación del método se recomienda:

- Implementar separadamente rutinas que dado el paso h de una malla computen la matriz de restricción a la malla de paso $2h$ y la matriz de prolongación a la malla de paso $\frac{h}{2}$. Puede resultar útil estudiar el comando `circshift`.

- Implementar separadamente una rutina que reciba parámetros: A, b, ω, x_0 y ν y aplique ν iteraciones del método de Jacobi con peso ω para resolver el sistema $Ax = b$, con dato inicial x_0.

- Aplicar Jacobi con dos cantidades de iteraciones distintas: ν_1 para los suavizados de la fase de ascensoy ν_2 para los suavizados de la fase de descenso.

Resolver para $\varepsilon = 0.1$, $a = b = 1$ y $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + x - 1$.

Comparar los resultados y los tiempos de ejecución con los obtenidos por resolución directa usando diferencias finitas centradas.