# Topología

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 9

**Espacios de adjunción e introducción a CW-complejos**

Sean $X, Y$ espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Denotaremos por $X \cup_f Y$ al espacio de adjunción correspondiente, junto con las funciones naturales $\bar{i} : Y \to X \cup_f Y$, $\bar{f} : X \to X \cup_f Y$.

1. Pruebe que $Y$ es un retracto de $X \cup_f Y$ si y sólo si existe una función $g : X \to Y$ tal que $g|_A = f$. Deduzca que si $A$ es un retracto de $X$, entonces $Y$ es un retracto de $X \cup_f Y$.
2. Si $X$ e $Y$ son compactos, entonces $X \cup_f Y$ es compacto.
3. Si $X$ e $Y$ son $T_1$, entonces $X \cup_f Y$ es $T_1$.
4. 
   *a*) Si $A$ es no vacío y $X$ e $Y$ son conexos, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   
   *b*) Si $A$ es no vacío y $X$ e $Y$ son arco-conexos, entonces $X \cup_f Y$ es arco-conexo.
   
   *c*) Si $Y$ es conexo y si $A$ interseca cada componente conexa de $X$, entonces $X \cup_f Y$ es conexo.
   
   *d*) Si $A$ es conexo y no vacío y $X \cup_f Y$ es conexo, entonces $Y$ es conexo.
5. Sean $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ son subespacios tales que $A \subseteq X'$ y $f(A) \subseteq Y'$. Entonces $X' \cup_f Y'$ es subespacio de $X \cup_f Y$.
6. 
   *a*) Sean $Y'$ un espacio topológico y $g : Y \to Y'$ una función continua. Dado que $Y$ puede verse como un subespacio cerrado de $X \cup_f Y$, podemos construir el espacio $(X \cup_f Y) \bigcup_g Y'$. Por otro lado, podemos construir el espacio de adjunción $X \cup_{g \circ f} Y$. Pruebe que hay un homeomorfismo natural $(X \cup_f Y) \bigcup_g Y' \cong X \cup_{g\circ f} Y$.
   
   *b*) Sea ahora $j : X \to X'$ una inclusión cerrada, de manera que tiene sentido el espacio de adjunción $X' \cup_f Y$. Entonces $X' \cup_f Y \cong X' \bigcup_{\bar{f}} (X \cup_f Y)$.
7. Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Consideremos $f' : X \times \{0\} \to Y$ definida por $f'(x, 0) = f(x)$. Como $X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times I$, podemos definir el espacio de adjunción $M(f) := Y \cup_{f'} (X \times I)$, que se denomina el *cilindro* de $f$. El *cono* de $f$ se define como $C(f) = M(f)/(X \times 1)$.

   Pruebe que si $X$ e $Y$ son $T_2$, entonces tanto $M(f)$ como $C(f)$ son $T_2$.
8. Exhiba varias estructuras de $CW$-complejo para el plano proyectivo $\mathbb{R}(P^2)$, $S^n, D^n$, el toro $S^1 \times S^1$, la banda de Möbius y la botella de Klein.
9. Pruebe que el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}(P^n)$ admite una estructura de $CW$-complejo con una $2k$-celda para cada $0 \leq k \leq n$.
10. Sean $v, e, f \in \mathbb{N}$ tales que $v - e + f = 2$. Construya una estructura celular de $S^2$ que tenga $v$ $0$-celdas, $e$ $1$-celdas y $f$ $2$-celdas.

* 11. Pruebe que la esfera infinito $S^\infty = \bigcup_{n\geq 0} S^n$ es contráctil.

12. Sea $X$ un $CW$-complejo. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:
    - $X^1$ es conexo.
    - $X$ es arco-conexo.
    - $X$ es conexo.
13. 
    *a*) Puebe que $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ no admite una estructura de $CW$-complejo. Esto muestra que subespacios arbitrarios de $CW$-complejos no son necesariamente $CW$-complejos.

* *b*) Pruebe que, más aún, $X$ no tiene el tipo homotópico de ningún $CW$-complejo.

* 14. Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ admite una estructura de $CW$-complejo.

15. *a*) Sean $X, Y$ $CW$-complejos finitos. Pruebe que $X \times Y$ tiene estructura de $CW$-complejo.

    * *b*) Encuentre un ejemplo de dos $CW$-complejos $X$ e $Y$ para los cuales la topología de $X \times Y$ inducida por la estructura de $CW$-complejo es más fina que la topología producto.

16. Sean $X$ un $CW$-complejo y $K \subseteq X$ un subespacio compacto. Pruebe que $K$ interseca solo a finitas celdas abiertas. Concluya que $K$ está incluido en un subcomplejo finito. Concluya además que $X$ es compacto si y sólo si es finito.

17. Pruebe que todo $CW$-complejo es paracompacto.

18. Un *grafo* es un $CW$-complejo de dimensión $1$. Pruebe que un grafo arcoconexo es contráctil si y sólo si no contiene ciclos, esto es, subespacios homeomorfos al círculo $S^1$. A un grafo con tales propiedades lo llamamos *árbol*.

* 19. Pruebe que el grupo fundamental de un grafo es un grupo libre.

* 20. Pruebe que todo $CW$-complejo arcoconexo es homotópicamente equivalente a un $CW$-complejo con una única $0$-celda.

* 21. Pruebe que todo $CW$-complejo es localmente contráctil.

* 22. Sean $X, Y$ $CW$-complejos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice *celular* si para cada $n \geq 0$ cumple $f(X^n) \subseteq Y^n$. Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subcomplejo y $f : A \to Y$ es un morfismo celular, entonces el espacio de adjunción $X \cup_f Y$ tiene una estructura de $CW$-complejo.

    Concluya que el cociente de un $CW$-complejo por un subcomplejo tiene estructura de $CW$-complejo.

* 23. Sean $X$ un $CW$-complejo y $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento. Pruebe que $\tilde{X}$ admite una estructura de $CW$-complejo inducida tal que la función $p$ resulta celular.

* 24. Pruebe que dos estructuras de $CW$-complejo de un mismo espacio tienen la misma dimensión.