Topología

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 8

Teorema de Van Kampen y clasificación de revestimientos

Teorema de Van Kampen

1. Sea $X = U \cup V$ con U y V abiertos arcoconexos tales que $U \cap V$ es no vacío y arcoconexo. Sean $i : U \to X$ la inclusión y $x \in U$.

   a) Pruebe que si V es simplemente conexo, entonces $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un epimorfismo.

   b) Pruebe que si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, entonces $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es un isomorfismo.

2. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

   a) $T^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$, el toro perforado en un punto;

   b) $\mathbb{P}^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$, el plano proyectivo real perforado en un punto;

   c) $S^n \vee S^m$, la unión de dos esferas por un punto;

   d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$;

   e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$;

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

   g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

3. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $C_i \subseteq \mathbb{R}^2$ la circunferencia de centro $(i, 0)$ y radio i. Sea $X_n = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Pruebe que $\pi_1(X_n, (0, 0))$ es el grupo libre con n generadores.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 :$ existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d(x, (j - \frac{1}{2}, 0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

6. Sea $K = I \times I/ \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

   $$(x = x' \wedge y = y') \vee (\{y, y'\} = \{0, 1\} \wedge x = x') \vee (\{x, x'\} = \{0, 1\} \wedge y + y' = 1)$$

   El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de K.

Clasificación de revestimientos.

7. *a*) Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.
   b) Pruebe que toda función continua $P^2 \to S^1$ es null-homotópica.
   c) Exhiba una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.

8. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describa los revestimientos de T asociados a los subgrupos
   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

9. *a*) Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(T, x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T \to T$ que deja quieto a x_0.
   b) Pruebe que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ó T.

   Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1, a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1, ma_2\}$ es base de N para ciertos n, m.

10. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Pruebe que la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ y la función $\nu : G \to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Pruebe además que p es un morfismo.

11. Pruebe que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

12. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = r \circ q$.
    a) Pruebe que si p y r son revestimientos, también lo es q. Pruebe que q es normal si p lo es.
    b) Pruebe que si p y q son revestimientos, también lo es r.
    c) Pruebe que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

13. Sea B arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplementeconexo. Sea $p : \tilde{E} \to B$ revestimiento universal. Dado un revestimiento arcoconexo $r : E \to B$, pruebe que existe un revestimiento $q : \tilde{E} \to E$ tal que $r \circ q = p$.

14. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.

a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Pruebe que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

b) Pruebe que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

c) Concluya que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

15. Describa el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.