Topología

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 7

Revestimientos

Revestimientos

1. Sean X un espacio topológico e Y un espacio topológico discreto. Pruebe que la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es un revestimiento.

2. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.

   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.

   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.

   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.

   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \vee y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \vee w = 1\}$.

3. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

4. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

5. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe además que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

6. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Use este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

7. Pruebe que si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subseteq B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

8. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

9. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

10. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Pruebe que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es homotópicamente nula.

11. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Pruebe que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.

    b) Pruebe que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

    c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ, donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Pruebe que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

    d) Calcule el grupo fundamental de la banda de Möbius.

12. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

    a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.

    b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

    c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.

    d) $X = M$, la banda de Möbius.

    e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

    f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

13. Pruebe que no existe una retracción $r : D^2 \to S^1$.

14. Sean $f, g : S^1 \to S^1$ dadas por $f(z) = z^n$ y $g(z) = 1/z^n$. Calcule los morfismos inducidos $f_*, g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

Aplicaciones de los teoremas de Brouwer y Borsuk-Ulam

15. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

16. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

17. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

18. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.