

Topología
Segundo cuatrimestre - 2017
Práctica 6
Homotopía y el grupo fundamental

Homotopía

1. Pruebe que si $h, h' : X \rightarrow Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \rightarrow Z$ son homotópicas, entonces $kh, k'h' : X \rightarrow Z$ son homotópicas.
2. Sea X es un espacio topológico. Pruebe que las aplicaciones $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ definidas por $i_j(x) = (x, j)$ ($j \in \{0, 1\}$) son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : (x, t) \in X \times I \mapsto x \in X$. Más aún, $i_0 \simeq i_1$.
3. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas tales que $f \simeq g$. Pruebe que si f es una equivalencia homotópica, entonces g también lo es.
4. Dé un ejemplo de una función f que tenga inversa homotópica a izquierda (a derecha) pero no a derecha (a izquierda).
5. Pruebe que:
 - a) Si f posee una inversa homotópica a izquierda y una inversa homotópica a derecha, entonces f es una equivalencia homotópica.
 - b) f es una equivalencia homotópica si y sólo si existen funciones $g, h : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ y $h \circ f$ son equivalencias homotópicas.
6. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio y $a_0 \in A$. Supongamos que existe una función continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que: $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$; $H(A \times I) \subseteq A$; y $H(a, 1) = a_0$ para todo $a \in A$. Entonces la aplicación cociente $q : X \rightarrow X/A$ es una equivalencia homotópica.

Un subespacio $A \subseteq X$ es un *retracto* si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ (llamada *retracción*) tal que $ri = 1_A$, donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión del subespacio. Decimos que $A \subseteq X$ es un *retracto por deformación* si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ que además cumple $ir \simeq 1_X$. Decimos que $A \subseteq X$ es un *retracto por deformación fuerte* si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ tal que $ir \simeq 1_X$ rel A .

7. Pruebe que:
 - a) Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, entonces es contráctil. Más aún, C tiene a cualquiera de sus puntos como retracto por deformación fuerte. Concluya que I y \mathbb{R} son contráctiles.
 - b) Si X es contráctil, entonces es arcoconexo.

- c) Todo retracto de un espacio contráctil es contráctil.
8. Pruebe que:
- Todo subespacio compacto convexo de \mathbb{R}^n es retracto por deformación fuerte de \mathbb{R}^n .
 - Si A es un retracto de X , entonces para todo Y espacio topológico, $A \times Y$ es retracto de $X \times Y$.
 - Si X es un espacio conexo y $A \subseteq X$ es un subespacio discreto con más de un punto, entonces A no es un *retracto débil* de X , es decir, $\nexists r : X \rightarrow A$ continua tal que $r \circ i \simeq \text{id}_A$.
9. Sean X, Y espacios topológicos. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X en Y . Pruebe que:
- Si Y es contráctil, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.
 - Si X es contráctil e Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un sólo elemento.
 - Hay una biyección natural $[*, Y] \rightarrow \pi_0(Y)$.
 - Más generalmente, si Y es contráctil, entonces hay una biyección natural $[Y, X] \rightarrow \pi_0(X)$.
 - Si X' es otro espacio y $X \simeq X'$, entonces hay una biyección entre $\pi_0(X)$ y $\pi_0(X')$.
10. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y Z un espacio topológico. Definimos aplicaciones

$$f^* : [g] \in [Y, Z] \mapsto [g \circ f] \in [X, Z],$$

$$f_* : [g] \in [Z, X] \mapsto [f \circ g] \in [Z, Y].$$

Pruebe que:

- Las funciones f^* y f_* están bien definidas.
 - Si $f' : X \rightarrow Y$ es otra función continua y $f \simeq f'$, entonces $f^* = f'^*$ y $f_* = f'_*$.
 - Si f es una equivalencia homotópica, entonces f^* y f_* son biyecciones.
11. Sea X el *peine*, esto es, el subespacio de \mathbb{R}^2 dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0 \vee x^{-1} \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Sea $x_0 = (0, 1) \in X$. Pruebe que:

- El espacio X es contráctil.
 - No existe una homotopía *relativa a* x_0 entre la identidad $\text{id}_X : X \rightarrow X$ y la función constante $c : x \in X \mapsto x_0 \in X$.
- Esto nos dice que toda contracción de X a x_0 mueve al punto x_0 .
- Por otro lado, el espacio Y que resulta de pegar dos copias de X identificando los puntos x_0 en un solo punto *no* es contráctil.

- d) La inclusión $i : X \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ es una equivalencia homotópica pero no un retracto.
12. Si X es un espacio, el cono de X es el espacio $CX = X \times I / \sim$ donde \sim es la relación de equivalencia $(x, 1) \sim (y, 1)$ para todo par de puntos $x, y \in X$. Si $x \in X$ y $t \in I$, escribimos $[x, t] \in CX$ a la clase de equivalencia de (x, t) en $X \times I$. Pruebe que:
- La función $i : x \in X \mapsto [x, 0] \in CX$ es continua, inyectiva y cerrada.
 - El espacio CX es contráctil.
 - X es contráctil si y sólo si $i : X \rightarrow CX$ es un retracto.
 - $f : X \rightarrow Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f se puede extender a una función continua $\bar{f} : CX \rightarrow Y$.

El grupo fundamental

13. Sean X es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in C(I, X) : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

con la topología de subespacio de la topología compacto-abierta. Pruebe que hay una biyección

$$\pi_0(\Omega(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0).$$

14. Sean X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] \mid f : S^1 \rightarrow X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g$ rel $\{s\}$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

15. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X . Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega, \omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.
16. Pruebe que $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.
17. Sean X un espacio, $A \subseteq X$ un subespacio e $i : A \rightarrow X$ la inclusión. Pruebe que:
- Si $r : X \rightarrow A$ es una retracción, entonces cualquiera sea $a_0 \in A$ el morfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo y el morfismo $i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo.
 - Si A es un retracto por deformación, entonces para todo $a_0 \in A$ se tiene que $\pi_1(X, a_0) \cong \pi_1(A, a_0)$.
18. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $f : A \rightarrow X$ una función continua. Pruebe que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow X$, entonces para todo $a \in A$, el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo trivial.

19. Sea (G, \cdot, e) un grupo topológico. Si $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, definimos $\alpha \odot \beta \in \Omega(G, e)$ por la regla:

$$(\alpha \odot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$$

- a) Demuestre que la operación \odot dota al conjunto $\Omega(G, e)$ de estructura de grupo.
- b) Pruebe que esta operación induce una operación de grupo —que también denotaremos \odot — en $\pi_1(G, e)$.
- c) Demuestre que la operación \odot coincide con operación usual en $\pi_1(G, e)$, inducida por la concatenación de lazos.
- d) Pruebe que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.