Topología

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 4

Compacidad y axiomas de separación

Compacidad

1. Sean τ, τ' dos topologías en X.

    a) Pruebe que si τ' es más fina que τ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) es compacto.

    b) Pruebe que si (X, τ) y (X, τ') son compactos y Hausdorff, entonces o bien $\tau = \tau'$ o bien τ y τ' no son comparables.

2. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y sea $\tau_c = \{U \in \tau : X \setminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\emptyset\}$. Pruebe que τ_c es una topología sobre X.

3. Pruebe que si X tiene la topología del complemento finito, entonces X es compacto.

4. Decida si $[0, 1]$ es compacto para

    a) la topología $\{U \subseteq [0, 1] : [0, 1] \setminus U \text{ es a lo sumo numerable}\} \cup \{\emptyset\}$;

    b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

5. Pruebe que S_Ω no es compacto pero es secuencialmente compacto.

6. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos T_1 tales que $X_n \subseteq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología final respecto de las inclusiones $\iota_n : X_n \to X$. Pruebe que si $K \subseteq X$ es compacto, entonces $K \subseteq X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea X metrizable. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X.

    b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

    c) X es compacto.

8. Sean X e Y espacios topológicos, con X compacto e Y Hausdorff. Muestre que si una función $f : X \to Y$ es continua, entonces es cerrada.

9. Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Puebe que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo su gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

10. Sea $f : X \to Y$ función continua. Pruebe que son equivalentes:

    a) f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.

    b) f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.

    c) Para todo Z espacio topológico, $id_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ es cerrada.

    d) f es propia.

11. Sea $f : X \to Y$ suryectiva y propia. Pruebe que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Compacidad local

12. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

13. Pruebe que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

14. Pruebe que si $\prod_{i\in I} X_i$ es localmente compacto y $X_i \neq \emptyset$ para todo i, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

15. Pruebe que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es continua y abierta, entonces $f(X)$ es localmente compacto. Halle un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

16. Pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

17. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n),$$

pruebe que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n.

18. Pruebe que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Axiomas de separación

19. Pruebe que si X es regular, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

20. Pruebe que si X es normal, entonces dos cerrados disjuntos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

21. Pruebe que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

22. Pruebe que si X es un conjunto ordenado con la topología del orden, entonces X es regular.

23. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Pruebe que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff o regular o normal, entonces también lo es cada X_α.

24. Sea X un conjunto y sean τ, τ' topologías en X tales que $\tau \subseteq \tau'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, ¿qué puede deducirse de X con la otra topología?

25. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, Y Hausdorff. Pruebe que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

26. Pruebe que si X es normal y conexo, entonces X tiene un solo punto o es no numerable.

27. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es *retracto* de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

    a) Pruebe que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.
    b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Pruebe que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
    c) Pruebe que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

28. Pruebe que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.
29. Pruebe que si Y es normal con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.
30. Pruebe que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.
31. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Pruebe que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.
32. Pruebe que si X es compacto y Hausdorff, entonces es normal.
33. Pruebe que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

34. Sea Y una compactificación T_2 de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Čech. Pruebe que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.
35. *a*) Pruebe que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
    Sugerencia: pruebe en primer lugar que, para cada $\epsilon > 0$, existe un elemento α de S_Ω tal que $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Sea entonces $\epsilon = 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ y considere los correspondientes puntos α_n.
    b) Pruebe que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Čech son equivalentes.
    c) Concluya que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.
36. Sea X completamente regular. Pruebe que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.
37. Sea X discreto.
    a) Pruebe que si $A \subseteq X \subseteq \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
    b) Pruebe que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.
    c) Pruebe que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Grupos topológicos

Un *grupo topológico* G es un grupo y un espacio topológico tal que las funciones $(x, y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

38. Pruebe que $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot)$ y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.
39. Sea G un grupo y un espacio topológico. Pruebe que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \to G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.
40. Pruebe que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.
41. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e. Pruebe que existe un abierto V que contiene a e tal que $V \cdot V \subseteq U$ y $V^{-1} = V$.
42. Pruebe que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2.
43. Pruebe que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Pruebe que si H es invariante, entonces su clausura también lo es.
44. De los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$, decida cuáles son compactos y cuáles son conexos.