El teorema de Borsuk-Ulam

Lema. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S^1$. Sea $R : S^1 \to S^1$ definida por $R(z) = \frac{z}{f(1)}$. Entonces el morfismo*

$$(R \circ f)_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$$

es la multiplicación por un entero impar.

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, el revestimiento universal de S^1. Tenemos un isomorfismo de grupos

$$\pi_1(S^1, 1) \to p^{-1}(1) = \mathbb{Z}, \quad [\beta] \mapsto \hat{\beta}(1), \tag{1}$$

donde $\hat{\beta}$ es el levantado de β por p que empieza en 0. Sea $\alpha : I \to S^1$ definida por $\alpha(t) = e^{2\pi it}$. Notemos que (1) es el isomorfismo $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ que identifica a $[\alpha]$ con el 1. Queremos ver que $(R \circ f)_*[\alpha] = [R \circ f \circ \alpha]$ se identifica con un entero impar. Para alivianar la notación, llamemos $\gamma = R \circ f \circ \alpha$. Sea $\hat{\gamma}$ el levantado de γ por p que empieza en 0. Debemos mostrar que $\hat{\gamma}(1)$ es un entero impar. Para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\alpha(t + \tfrac{1}{2}) = e^{2\pi it + \pi i} = -e^{2\pi it} = -\alpha(t).$$

Aplicando $R \circ f$ y usando que $f(-x) = -f(x)$ y que R es lineal, concluimos que

$$\gamma(t + \tfrac{1}{2}) = -\gamma(t)$$

para todo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Luego

$$p(\hat{\gamma}(t + \tfrac{1}{2})) = -p(\hat{\gamma}(t)) = p(\hat{\gamma}(t) + \tfrac{1}{2})$$

para todo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Como dos números reales están en la misma fibra de p si y solo si difieren en un entero, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$ existe un entero n_t tal que

$$\hat{\gamma}(t + \tfrac{1}{2}) = \hat{\gamma}(t) + \tfrac{1}{2} + n_t. \tag{2}$$

De la continuidad de $\hat{\gamma}$ y la conexión de $[0, \frac{1}{2}]$, se deduce que n_t es un mismo entero n para todo t. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}(1) &= \hat{\gamma}(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} + n & &(\text{por (2) con } t = \tfrac{1}{2}) \\
&= \hat{\gamma}(0) + \tfrac{1}{2} + n + \tfrac{1}{2} + n & &(\text{por (2) con } t = 0) \\
&= 2n + 1, & &(\text{porque } \hat{\gamma}(0) = 0)
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Corolario. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S^1$. Entonces el morfismo*

$$f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$$

no es el morfismo trivial.

Demostración. Sea $R : S^1 \to S^1$ definida por $R(z) = \frac{z}{f(1)}$; notemos que R es un homeomorfismo. Por el lema anterior, $(R \circ f)_*$ no es el morfismo trivial. Pero $(R \circ f)_*$ es igual a la composición

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow[\cong]{R_*} \pi_1(S^1, 1),$$

en la que R_* es un isomorfismo —por ser R un homeo. Se sigue que f_* no es el morfismo trivial. □

Teorema (Borsuk-Ulam)**.** *Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua. Entonces existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Proof. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in S^2$. Sea $g : S^2 \to S^1$ dada por:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

Notemos que $g(-x) = -g(x)$. Sea $i : S^1 \to S^2$ la inclusión definida por $i(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$; notemos que $i(-x) = -i(x)$. Sea $h : S^1 \to S^1$, $h = g \circ i$. Como $h(-x) = -h(x)$, sabemos que

$$h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, h(1))$$

no es el morfismo trivial, por el corolario anterior. Pero esto contradice el hecho de que h_* se factoriza por $\pi_1(S^2, i(1)) = 1$. □