1. Hallar la función característica de la distribuciones $\varepsilon(\lambda)$ y $\Gamma(n,\lambda)$ Calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza de ambas.

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Compruebe utilizando funciones características que

   a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Longrightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

   b) $X \sim \mathcal{B}i(n,p), Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Longrightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$

3. *a*) Calcular la función característica asociada a una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$.
   Sugerencia: Utilizar la igualdad
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}.$$

   b) Verificar que si X es una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ entonces $\phi_{2X} = \phi_X^2$. Observar que esto dice que ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$ aunque X e Y no sean independientes.

   c) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$. Hallar para cada $n \in \mathbb{N}$ la distribución del promedio $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. ¿Contradicen sus resultados algún teorema conocido?

4. Sea X una variable aleatoria con media cero y varianza finita tal que para cierta variable aleatoria $Y \sim X$ independiente de X se verifica que $X + Y$ y $X - Y$ son independientes.

   a) Probar que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^3 \phi_X\left(-\frac{t}{2}\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   b) Deducir que si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $\phi_X(t) \neq 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)} = \left[\frac{\phi_X\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\phi_X\left(-\frac{t}{2^n}\right)}\right]^{2^n}$.

   c) Probar que $\phi_X(t) = \phi_X(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducir que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^4$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
   Sugerencia: Estudiar el cociente $\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)}$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2 de ϕ_X en $t_0 = 0$.

   d) Concluir que $X \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

   e) Probar que el resultado sigue valiendo aún si la media de X es distinta de cero.

5. *a*) Sea $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sqrt{n}\big(\overline{Z}_n - \mu\big) \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$.

   b) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 finitas tal que para algún $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se verifica que $\sqrt{n_0}\big(\overline{X}_{n_0} - \mu\big) \sim X_1 - \mu$. Probar que $X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.[1]

6. Probar que no existen variables aleatorias X y Z independientes e idénticamente distribuidas tales que
   $$X - Z \sim \mathcal{U}[-1,1].$$

7. Probar mediante el estudio de funciones características la ley débil de los grandes números para variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita sin asumir la finitud del segundo momento.

[1] Observar que este resultado dice que la distribución normal es la única con segundo momento finito que resulta invariante por la estandarización correspondiente al Teorema del Límite Central. ¿Es razonable esto?

8. *a*) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}.$$

Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1,1]$.

Sugerencia: Utilizar la identidad $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

b) Sea $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. y para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{W_k}{2^k}.$$

Probar que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[0,1]$. Interpretar el resultado obtenido.

9. Sea $(X_n,Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios tal que X_n e Y_n son independientes para todo $n\in\mathbb{N}$ y además $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X'+Y'$, donde X' e Y' son independientes y tales que $X'\sim X$ e $Y'\sim Y$.

10. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n-X)\xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Mostrar que

$$n^{\alpha}(\overline{X}_n-\mu)\xrightarrow{P}\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq\alpha<\frac{1}{2}\\ \\ \infty & \text{si } \alpha>\frac{1}{2},\end{cases}$$

donde $n^{\alpha}(\overline{X}_n-\mu)\xrightarrow{P}\infty$ significa que para todo $M>0$ se tiene $\lim_{n\to+\infty}P(|n^{\alpha}(\overline{X}_n-\mu)|\leq M)=0$. ¿Qué sucede si $\alpha=\frac{1}{2}$?[2]

11. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n\xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n)\xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua.

12. *a*) Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x)=\frac{2}{x^3}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^{n}X_i>e^{55}\right)$ con $n=100$. *Sugerencia*: Hallar la distribución de $\log X$.

b) Hallar n tal que la el error cometido sea menor a 0.1.

13. Rehacer el ejercicio 6 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev.

[2]Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

14. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria[3][4]

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i \le t\}}{n}.$$

   a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

   b) Mostrar que $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}\big(0, F(t)(1-F(t))\big)$.

15. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$ para cierto $\theta > 0$. Probar que $\sqrt{n}\big(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}\big(0, 3^{-1}\big)$.

16. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} \qquad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2}} \qquad W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2,$$

   hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

17. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ. Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \lambda^2)$.

18. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m, respectivamente. Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

19. Se realizan n ensayos Bernoulli en forma independiente, cada uno de ellos con probabilidad de éxito 0.6.

   a) Si $n = 10^4$ Estimar la probabilidad de que se produzcan entre 7901 y 8100 éxitos. Acotar el error.

   b) Hallar n tal que el error cometido sea menor a 0.1.

[3] Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

[4] A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F. Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.