1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de

   a) μ y σ^2.

   b) μ, siendo $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida.

   c) σ^2, siendo $\mu = \mu_0$ conocida.

2. Consideremos muestras aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ para cada una de las siguientes distribuciones:

   i) exponencial de parámetro θ.

   ii) Poisson de parámetro θ.

   iii) con densidad
   $$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x), \quad \theta > 0.$$

   iv) geométrica de parámetro θ.

   a) Encontrar en cada caso el estimador de máxima verosimilitud y el de momentos de θ.

   b) En los dos primeros casos y para el estimador de máxima verosimilitud del tercero, decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados.

   c) Decir si los estimadores obtenidos son consistentes. Justificar.

3. Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a. de una distribución discreta Y a valores $y_1, \ldots, y_k$ con probabilidad $p_1, \ldots, p_k$, respectivamente.

   a) Obtener el EMV para los valores $p_1, \ldots, p_k$ en el caso en que $p_1 > 0, \ldots, p_k > 0$ y en la muestra se observaron todos los valores posibles de Y.

   b) ¿Podría suceder que se observara el valor y_1 en la muestra y que p_1 sea 0?

   c) Supóngase que y_1 no fue observado en la muestra, mientras que sí fueron observados los valores restantes. Obtener el EMV para los valores $p_1, \ldots, p_k$ en el caso en que $p_1 \geq 0, p_2 > 0, \ldots, p_k > 0$.

   d) Concluir para el caso en que $p_1 \geq 0, \ldots, p_k \geq 0$ que los estimadores son
   $$\widehat{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{y_j\}}(X_i)}{n} = \frac{\#\{i : X_i = y_j\}}{n}$$
   para $j = 1, \ldots, n$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad
   $$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

   a) Probar que $T = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

   c) Decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes. Justificar.

d) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para θ.
Sugerencia: Encontrar la distribución de $\min\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)-\theta$.

5. Se define el *error cuadrático medio* de un estimador $\hat{\theta}$ como

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$$

   a) Verificar que $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \left(\mathrm{sesgo}(\hat{\theta})\right)^2$, donde $\mathrm{sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.
   b) ¿Cuánto vale $\mathrm{ECM}(\hat{\theta})$ si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ?

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal.

   a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la media cuando la varianza es conocida.
   b) Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre y se determina el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12$.
      i) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0{,}6$.
      ii) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en i) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}(\lambda)$.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para λ.

8. Se seleccionan muestras aleatorias independientes de dos poblaciones distintas y para la media de cada una de las poblaciones se construye un intervalo de confianza de nivel 0.90 (90 %).

   a) Calcular la probabilidad de que ninguno de los intervalos contenga al verdadero valor de la media que estima.
   b) Calcular la probabilidad de que al menos uno de los intervalos no contenga al verdadero valor de la media que estima.
   c) Generalizar a) y b) al caso de k poblaciones, siendo $k \geq 2$.