1. Sea $(X_1, X_2, ...)$ un proceso de Bernoulli de parámetro p.

   a) i. Calcule la probabilidad que haya menos de 5 éxitos entre los ensayos 27 y 47.

      ii. ¿Cuál es la probabilidad que el tercer éito haya ocurrido antes del ensayo 13?

      iii. ¿Cuál es la probabilidad que la tira 10001010111010 aparezca entre los ensayos 105 y 120?

   b) Sea Y_i = instante del i-ésimo éxito. Calcule la probabilidad $P(Y_i = k)$.

   c) Sea $R_t = \text{mín}\{i?0 : X_{t+i} = 1\}$. Calcule $P(R_t = k|R_{t?1} = h)$.

2. Dadas X_i^l con distribución Bernoulli $(\frac{\lambda}{l})$ con $i \in \mathbb{N}$, sea el proceso binomial rescalado $(S_t^l, t \geq 0)$ definido por $S_t^l = \sum_{i:i\leq lt} X_i^l$. Demuestre que los incrementos de S_t^l convergen en distribución a los incrementos de un proceso de Poisson, o sea, que $S_{t+h}^l - S_t^l$ converge en distribución a $N_{t+h} - N_t$.

3. Sea N un proceso de Poisson y sea $N_{(a,b]}$= cantidad de ocurrencias en el intervalo $(a, b]$. Dados $T > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, mostrar que para cada $0 \leq a \leq b \leq T$ la variable aleatoria $N_{(a,b]}$ condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ tiene distribución $Bi(n, p_{b-a,T})$, donde $p_{b-a,T} = \frac{b-a}{T}$.
   ¿Se anima a conjeturar, basándose en este resultado, cuál debería ser la distribución conjunta condicionada al evento $\{N(0, T] = n\}$ de los n puntos del proceso de Poisson sobre el intervalo $[0, T]$?

4. Suponga que el número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes): A, con tasa λ_A de goles por partido, y B, con tasa λ_B de goles por partido.

   a) Si se enfrentan A y B, ¿Cuál es la probabilidad de que A gane 2 a 1?

   b) Suponga que ha transcurrido el primer tiempo entre A y B, si se sabe que A va ganando 2 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 minutos y el segundo antes de 30 minutos?.

   c) Va a comenzar el segundo tiempo (A va ganando 2 a 0), ¿cuál es la probabilidad de que A marque 3 goles antes de los 30 minutos (sin importar lo que pase con B)?

   d) Suponga que el partido en su tiempo reglamentario (90 min.) quedó igualado 3 a 3. Sin embargo, es necesario definir el ganador, para ello se utilizará la modalidad “golden goal", es decir, el primero que marca el gol gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se prolongue por más de 45 minutos?

   e) Asuma que ahora se cambian las reglas a “two golden goals", es decir, el primer equipo que marca 2 goles consecutivos gana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane B?.