Proba (M) 12/11/17.
Clase práctica 21

1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid con media $\mu_X \neq 0$ y varianza σ_X^2 y sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid con media μ_Y, varianza σ_Y^2, tal que Y_j y X_k son independientes para cualquier elección de j y de k. Hallar el límite en distribución de
$$Z_n := \sqrt{n}\Big(\frac{\bar{Y}_n}{\bar{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\Big)$$
y probar que si g es una función continua tal que $g(\mu_X) = \sigma_X$, entonces
$$W_n := \sqrt{n}\Big(\frac{\bar{X}_n - \mu_X}{g(\bar{Y}_n)}\Big)$$
converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. Una pizzería con 144 sucursales en la ciudad lleva una estadística del tiempo T transcurrido entre el horario de apertura de la sucursal y el momento en que está lista la primera pizza para delivery (T_i es el tiempo transcurrido en la pizzería i-ésima). De ese modo, pueden calcular cuál es el mejor horario para que comiencen a trabajar los repartidores. Se sabe que, para cada sucursal, el tiempo transcurrido (en minutos) hasta que se recibe el primer pedido de la noche es una v.a. X_i con distribución $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$, mientras que el tiempo que se tarda en preparar la primera pizza es una v.a. Y_i con distribución $\mathcal{N}(20, 4)$. Además, si el pedido llega muy temprano, es más probable que se tarde más en preparar la pizza por cuestiones de la cocina, y menos si llega más tarde, por lo que la correlación entre ambas variables es $\rho = -0{,}4$. (Esto ocurre para cada una de las 144 sucursales, y de forma independiente entre sí).
   a) Hallar $E(T)$ y $V(T)$.
   b) Aproximar la probabilidad de que en una noche cualquiera, el promedio de los tiempos T_i sea superior a 28 minutos. Plantear una cota para el error que se comete en la aproximación.
   c) Probar que existe un número de sucursales n tal que $P(29{,}99 < \frac{1}{n}\sum_1^n T_i < 30{,}01) > 0{,}9999$.

3. Ana tiene una gata de color gris de 2 años y su vecino tiene una gata de color gris de 1.5 años. Un día, al llegar Ana a su casa, se encuentra con las dos gatas adentro. Para decidir cuál es la suya, lo que hace es observar a una gata y contar la cantidad de minutos que pasan hasta que maulla por primera vez.
   Sea Y la edad de la gata observada, donde $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$ y $P(Y = 1{,}5) = \frac{2}{3}$, y supongamos que la cantidad de minutos X que pasan hasta que maulla por primera vez, dado que $Y = y$, es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\frac{1}{2y-1}$
   a) Hallar la densidad de X y calcular $P(X < 2)$.
   b) Hallar $E(X|Y)$, $E(X)$ y $V(X)$.
   c) Calcular la probabilidad de que Ana haya observado a su gata y halla tenido que esperar al menos 2 minutos.