Proba (M) - 2/11/17.
Clase práctica 19 - Me convergencias, Ley de los grandes números, Slutzky.

1. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y para $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } U \leq \frac{1}{n} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probar que $nX_n \xrightarrow{cs} 0$ pero que $(nX_n)_{n\in}$ no tiene límite en L^p para ningn $p \geq 1$.

2. Dado $\alpha > 0$ sea $(X_n)_{n\in}$ una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución Bernoulli de partro $n^{-\alpha}$, respectivamente.
   a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$ para todo $\alpha > 0$.
   b) Probar que $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ para todo $p \geq 1$ y $\alpha > 0$.
   c) Estudiar para los distintos valores de $\alpha > 0$ la existencia de límite casi seguro de la sucesión $(X_n)_{n\in}$. En caso de existir tal límite, explicitarlo.
   d) Calcular $P(L^+ = 1)$ para los distintos valores de $\alpha > 0$, donde $L^+ := \limsup_{n\to+\infty} X_n$.
   e) Probar que $P(L^- = 0) = 1$ para todo $\alpha > 0$, donde $L^- := \liminf_{n\to+\infty} X_n$.

3. Sea Π una partición del intervalo $[0,1]$ en k intervalos $I_1, \dots, I_k$ de longitudes $p_1, \dots, p_k$, respectivamente. Definimos la entropía S_Π de la partición Π como

$$S_\Pi = -\sum_{j=1}^{k} p_i \log p_i.$$

Sea $(X_n)_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y para cada $j = 1, \dots, k$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n^{(j)} = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \in I_j\}.$$

Mostrar que $\frac{\log(R_n^{-1})}{n} \xrightarrow{cs} S_\Pi$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $R_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} p_j^{Z_n^{(j)}}$.

4. Sea $(X_i)_{i\in}$ una sucesión de variables aleatorias iid con distribución $Be(p)$ y sea $\bar{X}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Asumiendo que

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}}$$

converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$ (Teorema central del límite), probar que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}}$$

también converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$