# Clase práctica 20 09/11 Proba (M)

**Ejercicio 1.** *La duración de una amalgama (en años) es una variable aleatoria con distribución exponencial:*

- *de parámetro* $0.29$ *si la humedad ambiente al momento de realizar el arreglo es mayor al 70 %.*
- *de parámetro* $0.14$ *si la humedad ambiente al momento de realizar el arreglo es de 70 % o menor.*

*El porcentaje diario de humedad tiene distribución* $N(68, 26)$.

a) *Se eligen al azar 100 arreglos de caries del dentista de Felipe, todos ellos realizados en días distintos. Aproximar la probabilidad de que el promedio de las duraciones de estos sea menor a* $6$ *años.*

b) *Cuántos arreglos realizados en días distintos es necesario elegir para que dicha probabilidad sea mayor o igual a* $0.90$*?*

**Ejercicio 2.** *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad*

$$f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0,+\infty)}(x)$$

*Dado* $\alpha > 0$ *definimos:*

$$Y_n = n^{\alpha} \frac{(n - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i^2)}{(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)^3}$$

a) *Calcular el límite en distribución de* $(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2})^2$.

b) *Probar que* $Y_n \xrightarrow{D} N(0, \lambda^6)$ *si* $\alpha = \frac{5}{2}$.

c) *Probar que* $Y_n \xrightarrow{P} 0$ *si* $\alpha < \frac{5}{2}$.

d) *Probar que* $Y_n \xrightarrow{P} \infty$ *si* $\alpha > \frac{5}{2}$*, es decir, para todo* $M > 0$ *vale que* $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| \leqslant M) = 0$. *Deducir que* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no esta acotada en probabilidad.*

**Ejercicio 3.** *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas* $\mathcal{E}(\lambda)$ *para cierto* $\lambda > 0$. *Se define la variable aleatoria*

$$E_n = \#\{i \in \{1, ..., n\} \,|\, X_i > \frac{1}{\lambda}\}$$

a) *Hallar sucesiones de numeros reales* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ *y exista el límite no trivial en distribución de* $\frac{E_n - a_n}{b_n}$.

b) *Hallar sucesiones de numeros reales* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to+\infty} |c_n| = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ *y exista el límite no trivial en distribución de* $\frac{E_n^2 - c_n}{d_n}$.