Clase práctica 18 30/10 Proba (M)

Ejercicio 1. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes tales que* $X_1 = 0$ *y si* $n \geqslant 2$

$$P(X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n\ln(n)} \text{ si } x = n, -n. \\ 1 - \frac{1}{n\ln(n)} \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica una ley débil de los grandes números pero no satisface ninguna ley fuerte.*

Ejercicio 2. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. independientes con distribución* $\mathcal{E}(1)$*, y para cada* n *definimos la variable aleatoria*

$$Y_n = \frac{X_n}{\ln(n+1)}$$

a) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

b) Probar que $P(L^+ = 1) = 1$ *donde* $L^+ = \limsup_{n\to+\infty} Y_n$.

c) Probar que $P(L^- = 0) = 1$ *donde* $L^- = \liminf_{n\to+\infty} Y_n$.

d) Deducir de los items anteriores que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no tiene límite casi seguro.*

Ejercicio 3. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de v.a. y* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *otra sucesión tal que* $N_k \sim \mathcal{U}(\{1, 2, ..., k\})$.

a) Probar que si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *entonces* $X_{N_k} \xrightarrow{P} X$.

b) Probar que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *y la sucesión* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es independiente de cada* X_n*, entonces* $X_{N_k} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Ejercicio 4. ***(Desigualdad de Jensen)*** *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función convexa, y* X *una variable aleatoria con* $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$*,* $\mathbb{E}(|\varphi(X)|) < +\infty$*. Probar que*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X))$$