Apunte de distribuciones condicionales

Definición 1. *Sean X, Y v.a. en un mismo espacio. Una familia $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ de funciones se dice un* ***sistema de probabilidades puntuales condicionales de*** X ***dada*** Y *si satisface:*

a) Para cada $y \in \mathbb{R}$, h_y es no negativa y $R_y = \{x \in \mathbb{R} \mid h_y(x) > 0\}$ es contable.

b) Para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible borel tal que $\mathbb{E}(|f(X,Y)|) < +\infty$ vale que $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y) = g(Y)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$g(y) = \sum_{x\in R_y} f(x,y)h_y(x).$$

En tal caso notamos $h_y(x) = p_{X|Y=y}(x)$

Teorema 1. *Sean X, Y v.a. en un mismo espacio.*

a) Si X e Y son discretas entonces $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ es un sistema de probabilidades puntuales condicionales de X dada Y si y solo si para todo $x \in R_X$ y $y \in R_Y$ se tiene que

$$h_y(x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

b) Si X es discreta e Y es continua con densidad f_Y entonces para cualquier $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ sistema de probabilidades puntuales condicionales de X dada Y se tiene

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h_y(x) f_Y(y)dy.$$

Definición 2. *Sean X, Y v.a. en un mismo espacio. Una familia $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ de funciones se dice un* ***sistema de densidades condicionales de*** X ***dada*** Y *si satisface:*

a) Para cada $y \in \mathbb{R}$, $h_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible borel no negativa.

b) Para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible borel tal que $\mathbb{E}(|f(X,Y)|) < +\infty$ vale que $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y) = g(Y)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)h_y(x)dx.$$

En tal caso notamos $h_y(x) = f_{X|Y=y}(x)$

Teorema 2. *Sean X, Y v.a. en un mismo espacio.*

a) Si (X, Y) es continuo entonces la familia $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ es un sistema de densidades condicionales de X dada Y $y \in R_Y$ donde

$$h_y(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} I_{(0,+\infty)}(f_Y(y))$$

b) Si Y es continua con densidad f_Y y existe $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ un sistema de densidades condicionales de X dada Y entonces el vector (X, Y) es continuo y su densidad viene dada por

$$f_{XY}(x,y) = h_y(x)f_Y(y).$$

c) Si Y es discreta y existe un sistema de densidades condicionales de X dada Y entonces X es continua y valen:

- *Dado $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ un sistema de densidades condicionales de X dada Y, para cada $y \in R_Y$ se tiene que h_y es la función de densidad de X bajo la probabilidad condicional $P(-|Y = y)$.*
- *Dado $(h_y)_{y\in\mathbb{R}}$ un sistema de densidades condicionales de X dada Y, la densidad de X viene dada por*

$$f_X(x) = \sum_{y\in R_Y} h_y(x) p_Y(y).$$

Teorema 3. ***(Leyes de Bayes)*** *Sean X, Y v.a. en un mismo espacio con X continua e Y discreta.*

a) Para cada $y \in R_Y$ vale

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{Y|X=x}(y).f_X(x)}{p_Y(y)} = \frac{p_{Y|X=x}(y).f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} p_{Y|X=t}(y).f_X(t)dt}.$$

b) Para cada $y \in R_Y$ vale

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X|Y=y}(x).p_Y(y)}{f_X(x)}.I_{(0,+\infty)}(f_X(x)) = \frac{f_{X|Y=y}(x).p_Y(y)}{\sum_{z\in R_Y} f_{X|Y=z}(x).p_Y(z)}.I_{(0,+\infty)}(f_X(x))$$

Clase práctica 15 19/10 Proba (M)

Ejercicio 1. *Un minero esta atrapado en una mina con tres puertas. La primera puerta lo lleva por un túnel durante 3 horas hasta la salida. La segunda puerta lo lleva por un túnel que lo devuelve a donde esta luego de 5 horas, y la tercera lo devuelve al mismo lugar luego de 7 horas. Si asumimos el que minero en la intersección toma cualquiera de las tres puertas con igual probabilidad siempre, entonces calcular* $\mathbb{E}(T)$ *donde* $T =$*'tiempo que tarda en salir de la mina'.*

Ejercicio 2. *Un banco recibe* $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ *clientes por día. Además se sabe que la cantidad de operaciones que realiza un cliente cualquiera tiene distribución* $\mathcal{P}(3)$*. Sea* $X =$*'cantidad de operaciones que se realizan en el banco por día'. Hallar* $\mathbb{E}(X)$*.*

Ejercicio 3. *Sean* X, Y *variables aleatorias tal que* $Y \sim U(0, 1)$*,* $X|Y \sim Bi(n, Y)$*.*

1. *Probar que* X *es discreta y hallar su distribución.*
2. *Hallar* $f_{Y|X=x}(y)$ *para* $x \in R_X$*. Calcular* $P(Y \leqslant y|X = x)$*.*
3. *Probar que* $\mathbb{E}(X|Y) = nY$ *y* $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X+1}{n+2}$*.*

Ejercicio 4. *Sean* X, Y *variables aleatorias tal que* $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$*,* $X|Y \sim \mathcal{P}(Y)$*.*

1. *Probar que* X *es discreta y hallar su distribución. Para* $\alpha = r$ *es conocida?*
2. *Probar que* $Y|X \sim \Gamma(X + \alpha, \lambda + 1)$*.*
3. *Probar que* $\mathbb{E}(XY + 3X|Y) = Y^2 + 3Y$*, y* $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X+\alpha}{\lambda+1}$*.*
4. *Calcular* $\mathbb{E}(X)$ *de dos formas distintas cuando* $\alpha = r$*.*