Correlación. Sumas de variables aleatorias. Estadísticos de orden. Función generadora de momentos (FGM) — Clase práctica 14

Alejandro Nasif Salum

Correlación (cont.)

1. Sean X e Y variables aleatorias continuas con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{12}{(1+x+y)^5} \cdot I_{[0,+\infty)}(x) \cdot I_{[0,+\infty)}(y).$$

   a) Hallar densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

   b) Calcular $F_{XY}(s,t)$. $F_X(s)$ y $F_Y(t)$. (Verificar que a partir de estas podían obtenerse las mismas densidades marginales —salvo un conjunto con área nula)
   (Sugerencia: considerar por separado el caso $s \leq 0 \vee t \leq 0$ y el caso $s > 0 \wedge t > 0$.)

   c) ¿Es $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$? ¿Son X e Y independientes?

   d) Calcular $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$ y ρ_{XY}.

Distribución de estadísticos de orden

2. Si se tienen variables independientes X_1, X_2, X_3 tales que

$$X_1 \sim \mathcal{U}[0,1], \quad F_{X_2}(t) = t^2 \cdot I_{[0,1]}(t) + I_{(1,+\infty)}(t), \quad F_{X_3}(t) = \frac{1}{3} \cdot I_{[0,+\infty)}(t) + \frac{2}{3} \cdot I_{[1,+\infty)}(t),$$

   y se definen las variables $S = \text{mín}\{X_1, X_2, X_3\}$ y $T = \text{máx}\{X_1, X_2, X_3\}$.

   a) Calcular $\mathrm{P}(T \leq 0{,}5)$, $\mathrm{P}(S > 0{,}2)$ y $\mathrm{P}(0{,}2 < S \leq T \leq 0{,}5)$.

   b) Hallar F_S, F_T y F_{ST}. ¿Son S y T continuas? ¿Son discretas?

   c) ¿Son S y T independientes?

   d) Llamemos U a la variable que representa el valor de la mediana de X_1, X_2 y X_3 (es decir, el valor de la variable que no resulte ni S ni T, suponiendo que resultan todas distintas).[1] Hallar F_U expresada en términos de las F_{X_i} $(i = 1, 2, 3)$.

[1] Se sugiere escribir con más detalle la definición de la variable aleatoria U, por ejemplo en función de X_1, X_2 y X_3, o de S y T, etc.).

3. Hallar la función de distribución del k-ésimo estadístico de orden de n variables aleatorias independientes, todas con función de distribución $F(t)$.

4. Si el tiempo X_i de funcionamiento hasta una falla de un componente electrónico sigue una distribución continua sin memoria con un promedio de 2 años, y un circuito deja de funcionar en cuanto uno de los n componentes (independientes) falla:

   a) ¿Qué distribución sigue el tiempo que transcurre hasta la falla del circuito?

   b) ¿Para qué valores de n la probabilidad de que el circuito funcione correctamente durante al menos 1 año es de al menos un 99 %?

   c) Repetir para un circuito capaz de funcionar incluso cuando uno solo de los n componentes está operativo.

Funciones generadoras de momentos (FGM) y suma de VA.

5. Calcular:

   a) las FGM (si existen) de las distribuciones:

      1) $\mathcal{P}(\lambda)$,

      2) $\Gamma(\alpha, \lambda)$,

      indicando su dominio.

   b) Calcular $E(X^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$ si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

6. Analizar la distribución de $S = X + Y$ si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ son variables aleatorias independientes, a partir de:

   a) $p_X(x)$ y $p_Y(y)$;

   b) $M_X(t)$ y $M_Y(t)$.

7. Si $X \sim \Gamma(\alpha_X, \lambda_X)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_Y, \lambda_Y)$ son V.A. independientes:

   a) La variable $Z = X + Y$, ¿tiene distribución Gamma en general? ¿En algún caso particular?

   b) ¿Qué distribución tiene $U = c \cdot X$ $(c > 0)$?

   c) ¿Para qué valores $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ (si existen) se tiene

   $$cX + dY \sim \Gamma(\alpha, 1)$$

   si $X \sim \mathcal{E}(3)$ e $Y \sim \Gamma\left(4, \frac{1}{2}\right)$? ¿Y con qué valor de α?