Clase práctica 17 (19-10-2017)
(versión actualizada)

Alejandro Nasif Salum

1. Consideremos el siguiente experimento llamado *Esquema de Ehrenfest*. Tenemos N bolitas numeradas distribuidas al azar en dos urnas (A y B). Elijo un número al azar entre 1 y N y extraigo la bola con dicho número para luego cambiarla de urna. Este experimento se repite indefinidamente.

   Definimos:

   — X_k: cantidad de bolitas que hay en la urna A después de la k-ésima extracción;

   — $p_k(j) = p_{X_k}(j)$: es decir, probabilidad de que la urna A tenga j bolitas tras la k-ésima extracción, y llamemos $\vec{p}_k = \big(p_k(0), \dots, p_k(N)\big)$;

   — $p(i,j) = p_{X_k|X_{k-1}=i}(j)$: es decir, probabilidad de que la Urna A tenga j bolitas tras la k-ésima extracción si tras la $(k-1)$-ésima extracción había i bolitas (probabilidad de transición del estado i al estado j).

   En el aula:

   a) Verificar que $p(i,j)$ está bien definida (porque no depende de k).

   b) Hallar la matriz de transición $P \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ (dada por $P_{i,j} = p(i,j)$).

   c) Probar que $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^{N+1}$ con componentes

   $$\vec{\mu}_j = \binom{N}{j} 2^{-N}, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

   es una distribución invariante o estacionaria para esta cadena; esto es, para todo $k \geq 1$:

   $$p_{k-1}(j) = \vec{\mu}_j,\ j = 0, 1, \dots, N \quad \implies \quad p_k(j) = \vec{\mu}_j,\ j = 0, 1, \dots, N,$$

   (o más simplemente, $\vec{p}_{k-1} = \vec{\mu} \implies \vec{p}_k = \vec{\mu}$).

   En el laboratorio:

   d) Para el experimento analizado, calcular las distribuciones $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_M$ de $X_1, X_2, \dots, X_M$ para $M = 7; 20; 1200$. Estudiar los casos $N = 10$, $N = 50$ y $N = 100$. Utilizar diferentes distribuciones para X_0. En particular:

- una distribución no aleatoria, como por ejemplo, $\vec{p}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$;
- una distribución uniforme, es decir, $\vec{p}_0 = (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{1}{N+1})$;
- la distribución del ítem c), $\vec{p}_0 = \vec{\mu}$.

Comparar los resultados numéricos obtenidos con el resultado del ítem c). ¿Converge siempre $\vec{p}_k$ a $\vec{\mu}$? ¿Y $\overline{\vec{p}_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} \vec{p}_i$?

e) Simular para cada N y cada p_0 del punto anterior, una realización la cadena $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_M$, para cada uno de los valores de M en d). Es decir, simular un valor aleatorio x_0 (un escalar) siguiendo la distribución $\vec{p}_0$, y dado dicho valor de X_0, simular un valor x_1 de la distribución de $X_{1|X_0=x_0}$. Luego simular un valor x_2 con la distribución $X_{2|X_1=x_1}$ y así hasta completar $x_0, x_1, \ldots, x_M$. En cada caso verificar que dicha sucesión no converge (¿por qué podemos afirmarlo con probabilidad 1?), pero sí parecen hacerlo las sucesiones

$$\overline{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} x_i$$

y

$$\hat{p}_k(j) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} I_{\{j\}}(x_i)$$

para cada $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$. ¿A qué valores se supone que convergen? *(Se sugiere revisar la Ley de los grandes números para cadenas de Markov).*

2. Consideremos un proceso de Markov en tiempo discreto con matriz de transición entre los estados $\{A, B, C, D\}$ dada por

$$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si $\vec{p}_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}, \frac{5}{18}\right)$, hallar

1) $\vec{p}_1$
2) $\vec{p}_3$ y $\vec{p}_{10}$
3) $\lim_k \vec{p}_k$.

b) Verificar que $\vec{\mu} = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7}, 0\right)$ es una distribución estacionaria, pero no es la distribución límite del ítem anterior. ¿Por qué es posible esto? ¿Cuáles son las posibles distribuciones estacionarias?

c) ¿Cuáles son las distribuciones iniciales que dan como distribución límite $\vec{\pi} = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{4}{25}, \frac{1}{5}\right)$?

3. Analizar cuál/es es/son la/s distribución/es estacionaria/s y para qué distribuciones iniciales $\vec{p}_0$ la distribución $\vec{p}_k$ es convergente, si se tiene la cadena de Markov con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

en los casos

a) $a = 1$ y $b = 0$;

b) $a = 1$ y $b > 0$ (¿qué pasa si $a = b = 1$?);

c) $a = 0$ y $b = 1$.

4. En el esquema de Ehrenfest con $N = 3$ se tiene la matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -\frac{1}{3}$ y $\lambda_4 = \frac{1}{3}$, asociados a los autovectores

$$\vec{v}_1 = (1, 3, 3, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -3, 3, -1), \quad \vec{v}_3 = (1, -1, -1, 1) \quad \text{y} \quad \vec{v}_4 = (1, 1, -1, -1),$$

respectivamente.

a) Dada una distribución $\vec{p}_0$ cuyas coordenadas en la base de autovectores $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ son $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, hallar las coordenadas en la misma base de $\vec{p}_k$.

b) En base al ítem anterior, decidir cuántas distribuciones estacionarias existen y cuál/es es/son.

c) En base también al primer ítem, observar que no para todas las $\vec{p}_0$ se tiene una distribución límite. ¿Para cuáles sí? (Se puede dar la respuesta en coordenadas en la base $\mathcal{B}$).

d) Dar una distribución inicial (se puede dar en coordenadas en la base $\mathcal{B}$, pero chequear que sea una distribución de probabilidad) tal que $\vec{p}_0 = \vec{p}_2$, pero $\vec{p}_0 \neq \vec{p}_1$.

Solución del ítem 1.c):

Supongamos que para cierto k vale $p_{k-1}(j) = \vec{\mu}_j$ para todos los valores de j en $\{0, 1, \ldots, N\}$.

Por un lado, tenemos para $j = 0$:

$$p_k(0) = \sum_{i=0}^{N} p(i,0)p_{k-1}(i) = \sum_{i=0}^{N} p(i,0)\vec{\mu}_i = p(1,0)\vec{\mu}_1 = \frac{1}{N} \cdot \binom{N}{1} 2^{-N} = 2^{-N} = \vec{\mu}_0;$$

y para $j = N$:

$$p_k(N) = \sum_{i=0}^{N} p(i,N)p_{k-1}(i) = \sum_{i=0}^{N} p(i,N)\vec{\mu}_i = p(N-1,N)\vec{\mu}_{N-1} = \frac{1}{N} \cdot \binom{N}{1} 2^{-N} = 2^{-N} = \vec{\mu}_N.$$

Por otro lado, si $1 < j < N$:

$$\begin{aligned}
p_k(j) = \sum_{i=0}^{N} p(i,j)p_{k-1}(i) = \sum_{i=0}^{N} p(i,j)\vec{\mu}_i = p(j-1,j)\vec{\mu}_{j-1} + p(j+1,j)\vec{\mu}_{j+1} = \\
= \frac{N-j+1}{N} \cdot \binom{N}{j-1} \cdot 2^{-N} + \frac{j+1}{N} \cdot \binom{N}{j+1} \cdot 2^{-N} = \\
= N! \cdot 2^{-N} \cdot \left[\frac{N-j+1}{N \cdot (j-1)! \cdot (N-j+1)!} + \frac{j+1}{N \cdot (j+1)! \cdot (N-j-1)!} \right] = \\
= N! \cdot 2^{-N} \cdot \left[\frac{1}{N \cdot (j-1)! \cdot (N-j)!} + \frac{1}{N \cdot j! \cdot (N-j-1)!} \right] = \\
= N! \cdot 2^{-N} \cdot \frac{j + (N-j)}{N \cdot j! \cdot (N-j)!} = \frac{N \cdot N!}{N \cdot j! \cdot (N-j)!} \cdot 2^{-N} = \binom{N}{j} 2^{-N} = \vec{\mu}_j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que vale $p_k(j) = \vec{\mu}_j$ para todos los valores de j en $\{0, 1, \ldots, N\}$, y esto prueba que $\vec{\mu}$ es estacionaria.