Práctica 1
Repaso y nueva luz sobre los números complejos

---

1. Representar gráficamente los números: z, w, $z+w$, $z-w$, $\overline{z}$, $\overline{w}$, zw, para:
   a) $z = 2i, w = \frac{3}{2} - i$ **b)** $z = -\sqrt{3} + i, w = \sqrt{3}$

2. **a)** Sea $z \in \mathbb{C}$, probar:
   i) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
   ii) $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |z|^2$
   iii) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
   iv) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$
   v) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

   b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, probar que:
   i) $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$
   ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   iii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

3. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:
   a) $3 + \sqrt{3}i$ **b)** $(-1-i)^{-1}$
   c) $(2+2i)(\sqrt{3}-i)$ **d)** $(-1-\sqrt{3}i)^5$
   e) $(-1-\sqrt{3}i)^{-5}$ **f)** $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$

4. Determinar la forma binomial de los siguientes números complejos:
   (a) $z = (\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{17}$.
   (b) $z_n = (-1+\sqrt{3}i)^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones:
   a) $|z| - z = 1 + 2i$ **b)** $z.\overline{z} - 2|z| + 1 = 0$
   c) $z^6 + 2 = 0$ **d)** $z^4 - 1 - i = 0$

6. **a)** Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$az^2 + bz + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

b) Resolver: $z^2 - (2i + 4)z + 10i - 5 = 0$

7. Probar que si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, la ecuación $|z - 1| = c|z + 1|$ representa una circunferencia o una recta.

Representar gráficamente: $|z - 3| = 2|z + 3|$ y $|z - 3| < 2|z + 3|$

8. Describir geométricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones.

Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.

a) $|\operatorname{Im}(z)| > 1$ **b)** $\operatorname{Re}(z - iz) \leq 2$ **c)** $|z - 1 + 3i| \leq 1$

d) $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$, $|z| > 2$ **e)** $|z - 4| > 3$ **f)** $1 < |z - 2i| \leq 2$

g) $0 \leq \operatorname{Arg}(z^2) \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$ **h)** $\operatorname{Im}(z^2) > 0$ **i)** $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$

9. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0$ representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y probar que toda circunferencia o recta puede escribirse de esta forma.

Definición: Una homografía (o transformacin de Möbius) es una función del tipo: $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $ad - bc \neq 0$. Observe que si $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, este tipo de funciones están bien definidas en $\hat{\mathbb{C}}$, y además resultan biyecciones: $H : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Además, decimos que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ representa a la homografía T.

10. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ matrices no singulares que respresentan a homografas T_1 y T_2 respectivamente.

    (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?
    (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?
    (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
    (d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

11. **a)** Dadas las funciones

$t(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación)

$h(z) = a(z - z_0) + z_0$, con $a \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a

$i(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$ (inversión)

describirlas geométricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?

b) Probar que $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en **a)**. Deducir cuál es la imagen por f de una circunferencia o de una recta.

c) Verificar que $g(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ es la homografía inversa de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

12. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

a) el disco $\{z : |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

b) el medio-disco $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

c) el cuadrante $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ e } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ por $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

13. **Tema complementario:** estudiar la representación esférica de los números complejos (Esfera de Riemann/proyección estereográfica). Se sugiere la sección 2.4 del capítulo 1 del libro de Ahlfors o la sección 6 del capítulo 1 del libro de Conway (ver bibliografía). Piense en la relación de esta esfera con el plano complejo extendido:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Analice a que se corresponden las siguientes regiones del plano complejo sobre la esfera de Riemann (para cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$):

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : aRe(z) + bIm(z) + c = 0\}$, para cada terna de números reales a, b, c.

En función de estos resultados ¿a qué tipo de regiones del plano complejo llamaría entornos del infinito?