

MATEMÁTICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2017**Práctica 6 - Diagonalización de matrices unitarias y Forma de Jordan**

Ejercicio 1. Encontrar una tercera columna para que la matriz $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea ortogonal siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

Ejercicio 2. Encontrar $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonal con $\det(U) = -1$.

Ejercicio 3. Encontrar una tercera fila para que la matriz $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ sea unitaria siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t A U$ es diagonal.

Ejercicio 5. Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ unitaria tal que $\overline{U}^t A U$ sea diagonal para la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

Ejercicio 7. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $f(3, 4) = (5, 0)$.

Ejercicio 8. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una rotación de eje $\langle (2, -2, -1) \rangle$ y ángulo $\pi/2$. Hallar $f(4, -1, 1)$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es una rotación.

b) Hallar una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 12. Hallar una rotación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2) = (0, \sqrt{2}, 0)$.

Ejercicio 13. Hallar una simetría $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, -1, 2) = (0, 3, 0)$.

Ejercicio 14. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. Para una matriz A notamos $m_A(t)$ a su polinomio minimal.

a) Si $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ es tal que $m_A(t) = t^3$, determinar las posibles formas de Jordan de A .

b) Si $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ es nilpotente y tal que $\text{rg}(A) = 6$, ¿cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A ?
¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ con $\text{rg}(A) = 9$?

Ejercicio 17. Hallar la forma y la base de Jordan para cada una de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ tal que $m_A(t) = t^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

Ejercicio 19. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ con autovalores λ_1 , λ_2 y λ_3 distintos tal que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10 \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Ejercicio 20. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n.$$