MATEMATICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2017

Práctica 5 - Determinantes y Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

Ejercicio 3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \cos^2 c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Si A es una matriz inversible tal que tanto A como A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 o -1?

Ejercicio 6. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ, son reales.

Ejercicio 7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

Ejercicio 8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible que satisface que $C\,B = A\,C$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 9. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

y sea $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ cualquiera. ¿Puede el sistema de ecuaciones lineales $A\,x = b$ tener una única solución?

Ejercicio 10. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} -x + a\,y + z & = & a \\ -x + (1-a)z & = & 1 \\ -x + y + z & = & a^2 \end{cases}$$

una única solución? Resolver el sistema para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 11. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite una solución no nula, para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12. Para las matrices A siguientes, calcular el polinomio característico, los autovalores y bases y dimensiones de los espacios de autovectores correspondientes a cada autovalor (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

Ejercicio 16. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

Ejercicio 17. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Para un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, se define $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$. Probar que para todo $x^{(0)}$ se cumple $x^{(n)} \to 0$ (es decir, $x_i^{(n)} \to 0$, $1 \le i \le 3$).

Ejercicio 20. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.