MATEMÁTICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2017

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\, 2x_2,\, 1 + x_1)$

b) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3,\ \ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geométricamente las siguientes transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) $f(x, y) = (x, 0)$

b) $f(x, y) = (x, -y)$

c) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t)$, con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

Ejercicio 3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a) $\operatorname{tr} : K^{n\times n} \to K$, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

b) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ \ f(A) = BA$ donde $B \in K^{r\times n}$ está dado

c) $\delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta(f) = f'$

d) $\Phi : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1]),\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

e) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$, donde $\alpha \in K$

Ejercicio 4.

a) Mostrar que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$, y que es única. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

c) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} &f(1, 0, 1) = (1, 2, 1), \quad f(2, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1), \\ &g(1, 1, 1) = (1, 1, 0), \quad g(3, 2, 1) = (0, 0, 1), \quad g(2, 2, -1) = (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si $f = g$.

d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 5.

a) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las tranformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

b) Clasificar las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, y determinar el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$.

Ejercicio 7. Sea $S = \langle(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

Ejercicio 8.

a) ¿Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ epimorfismo? ¿Y un epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_4[X]$?

¿Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo?

¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathrm{tr}(A) = 0\} \to \{g \in \mathbb{R}_3[X] : g(1) = g'(1) = 0\}$?

b) ¿Existe alguna t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

c) ¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$?

Ejercicio 9. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisface $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:

a) $S = \langle(1, 2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,

b) $S = \langle(1, -2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

a) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 2)\rangle$.

c) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

d) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 11. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_2, 2x_1-x_2)$. Determinar el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$, y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

a) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.

b) $f \neq \mathrm{Id}$ y $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Ejercicio 14.

a) Para $t = \pi$ en el Ejercicio 2.c), calcular f^2.

b) Hallar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f^3 = \mathrm{Id}$.

c) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq \mathrm{Id}$, tal que $A^3 = \mathrm{Id}$. ¿Y en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ y
$\mathcal{B}' = \{(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

b) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. ¿Cuáles son?

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, calcular su rango y encontrar matrices inversibles Q y P tales que $QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) ¿Existe una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 17. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?

b) Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.

c) Describir el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^3 \, : \, f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$.

Ejercicio 18. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

b) Verificar que f es un isomorfismo.

c) Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$. ¿Cuál es?

Ejercicio 19. Para las siguientes $f : V \to V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica

a) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

a) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.