

MATEMÁTICA 2 - Segundo Cuatrimestre 2017
Práctica 2 - Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos.

- a) $\{v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n : v_n = 0\}$, los vectores de K^n con última coordenada igual a cero.
- b) $K_n[X] := \{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$, los polinomios de grado a lo sumo n .
- c) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t = -A\}$.
- d) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, donde $C^\infty(\mathbb{R})$ son las funciones continuas infinitamente derivables.
- e) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$, donde $C(\mathbb{R})$ son las funciones continuas.

Ejercicio 2. Mostrar que $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

Ejercicio 3. Dados S, T subespacios de un espacio vectorial V , probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$.

Ejercicio 4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- b) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$
- c) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$
- d) $\mathbb{R}_n[X]$
- e) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$

Ejercicio 5. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
- c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 6. Sea V un K -espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- a) $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$.
- b) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a, b \in K$.
- c) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a \in K - \{0\}, b \in K$.
- d) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.
- e) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

Ejercicio 7. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K .

- a) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en \mathbb{C}^2 para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.
- b) $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$ en $K[X]$
- c) $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son las funciones $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.
- d) $\{e^x, x, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- e) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$, donde $K^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones $\{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in K\}$.

Ejercicio 8. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

- a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$
- b) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ejercicio 9. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales.

- a) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$
- b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f(-1)\}$
- d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f'(2) = 0\}$
- e) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$
- f) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j, \forall i, j\}$

Ejercicio 10. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K -espacio vectorial V indicado.

- a) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$
- b) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

Ejercicio 11. Extraer una base de los siguientes K -espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

- a) $\langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$
- b) $\langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$
- c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

Ejercicio 12. Hallar la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

- a) $\langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$

$$b) \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c) \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Ejercicio 13. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa.

$$a) V = \mathbb{R}^3, S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\} \text{ y } T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$$

$$b) V = \mathbb{R}^3, S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\} \text{ y } T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$$

$$c) V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle \text{ y } T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$$

$$d) V = \mathbb{R}[X], S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\} \text{ y } T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$$

$$e) V = \mathbb{R}[X], S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\} \text{ y } T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$$

Ejercicio 15. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

Ejercicio 16. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios de V que satisfacen $S \oplus T = V$.

$$a) V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\} \text{ y } T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es constante}\}$$

$$b) V = K^{n \times n}, S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\} \text{ y } T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$$

(los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T , *matrices antisimétricas*).

Ejercicio 17. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

$$a) S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle, V = \mathbb{R}^4$$

$$b) S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}, V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$c) S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle, V = \mathbb{R}_4[X]$$

Ejercicio 18. Mostrar que si S, T son subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

Ejercicio 19. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).

$$a) \text{ Probar que } \forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V.$$

$$b) \text{ Si } S \text{ es un subespacio de } V \text{ tal que } S \not\subseteq T, \text{ probar que } S + T = V. \text{ Calcular } \dim(S \cap T).$$

$$c) \text{ Si } S \text{ y } T \text{ son dos hiperplanos distintos, deducir } \dim(S \cap T).$$

Ejercicio 20. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base \mathcal{B} en los siguientes casos:

$$a) V = \mathbb{R}^3; \mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}, v = (1, 2, -1) \text{ y } v = (x_1, x_2, x_3)$$

$$b) V = \mathbb{R}_3[X]; \mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}, v = 2X^2 - X^3$$

$$c) V = \mathbb{R}^{2 \times 2}; \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}, v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$