Investigación Operativa

Segundo cuatrimestre - 2017

Práctica 2

Programación Lineal

---

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

   a) Pruebe que si f es localmente convexa entonces es convexa.

   b) Supongamos que f es de clase C^2. Pruebe que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$.

2. Construya un ejemplo en el que el algoritmo Simplex encuentre una solución óptima antes de que c_i sea positivo para todo i. Muestre que si ese es el caso entonces la solución tiene que ser degenerada.

3. ¿Puede una columna que acaba de dejar la base volver a entrar en el siguiente paso del algoritmo Simplex?

4. Demuestre que el problema de minimizar $c^t x$ sujeto a $Ax = b$ carece de interés porque sobre $\{x : Ax = b\}$ no existe el mínimo de $c^t x$ o bien $c^t x$ es constante.

5. Supongamos que se ha resuelto un problema de programación lineal y se desea incorporar al planteo una nueva variable no negativa con sus correspondientes datos. ¿Cómo se puede proceder sin rehacer todos los cálculos?

6. Resuelva aplicando Simplex los problemas:

   a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ \text{s.a. } & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.a. } & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= 3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a. } & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1 \\ & -4x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_1 - 2x_3 \\ \text{s.a. } & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_3 \geq -3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

7. Resuelva aplicando las dos fases de Simplex.

   a)

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 - 2x_2 - 8x_5 \\
\text{s.a.}\ & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_6 \geq 7 \\
& x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq 11 \\
& 6x_2 + x_4 \leq 3 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
\min z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.a}\ & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 \\
& 3x_1 - 4x_3 \geq -15 \\
& x_1 - 2x_3 = 0 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

8. Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$
\begin{aligned}
\min z &= -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \\
\text{s.a.}\ & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
& x_3 + x_7 = 1 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

   a) Verifique que si se usa como criterio el de elegir el menor r cuando hay empate entoces el algoritmo no termina.

   b) Verifique que $(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0)$ es una solución óptima y que el valor del funcional en ella es $z_0 = -\frac{1}{20}$.

9. Considere el modelo lineal

$$
\begin{aligned}
\min z &= c^t x \\
\text{s.a.}\ & Ax = b \\
& e^t x = 1 \\
& x_1, ..., x_{n-1} \geq 0 \\
& x_n \text{ libre.}
\end{aligned}
$$

   donde $e = (1, \dots, 1)^t$, b y c son vectores arbitratrios de dimensión n y A es la matriz definida por

$$
\begin{cases}
a_{ii} = a_{in} = 1 & \text{para } 1 \leq i \leq n, \\
a_{ij} = 0 & \text{para } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n, i \neq j.
\end{cases}
$$

   Use la restricción $e^t x = 1$ para eliminar la variable libre. ¿Se podría hacer lo mismo si x_n no fuera libre?

10. Considere el modelo lineal

$$
\begin{aligned}
\min z &= c^t x \\
\text{s.a.}\ & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Formule un modelo equivalente en forma standard tal que el vector de términos independientes sea cero.

Pista: se puede hacer introduciendo una variable y una restricción adicionales.

11. Halle todos los valores del parámetro α tales que las regiones definidas por las siguientes restricciones presentan vértices degenerados.

a)

$$\begin{aligned} x1 + x2 &\leq 8 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq \alpha \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

12. Resuelva los siguientes problemas de programación lineal usando el método del simplex. Si el problema es 2-dimensional, haga un esquema de la región de soluciones factibles y señale el progreso del algoritmo.

a)

$$\begin{aligned} \min z = -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\ \text{s.a. } 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 38 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 55 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max_z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 30 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min z = 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a. } -5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \min z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a. } 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \max z = 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a. } 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \min z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ \text{s.a. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

13. Aplique el test de optimalidad para encontrar todos los valores del parámetro α tales que $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^t$ es la solución óptima del siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = -x_1 - \alpha^2 x_2 + 2x_3 - 2\alpha x_4 - 5x_5 + 10x_6 \\ \text{s.a.}\ -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

14. La siguiente tabla corresponde a alguna iteración del método del simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	0	a	0	b	c	3	
	0	-2	1	e	0	2	d
	1	g	0	-2	0	1	f
	0	0	0	h	1	43	1

Halle condiciones sobre $a, b, \ldots, h$ tales que se cumpla:

a) La base actual es óptima.

b) La base actual es la única base óptima.

c) La base actual es óptima pero no única.

d) El problema no está acotado.

e) La solución actual mejorará si x_4 aumenta y cuando x_4 entre en la base, el cambio en la función objetivo sea cero.

15. Usar el método del simplex (de dos fases y Método M) para resolver los siguientes problemas de programación lineal:

a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{s.a.}\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 30 \\ x1 + 2x_2 + 4x3 = 40 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.a.}\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ -x1 + x2 - x5 = 4 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = -4x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}\ 3x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \\ x \geq 0. \end{aligned}$$