Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2017

Curvas algebraicas afines

(1) Grafique las curvas en $\mathbb{R}^2$ dadas por la ecuación $f(X,Y)=0$:
  (a) $f = Y - X^2$
  (b) $f = Y - X^3 + X$
  (c) $f = Y^2 - X^3$
  (d) $f = Y^2 - X^3 - X^2$
  (e) $f = (X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
  (f) $f = (X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$
  (g) $f = X^2 + X^3 + Y^2$
  (h) $f = 2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$
  (i) $f = X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$
  (j) $f = X^6 - X^2Y^3 - Y^5$

(2) Pruebe que las curvas planas definidas por los siguientes polinomios tienen a $p = (0,0)$ como único punto singular.
  (a) $Y^2 - X^3$
  (b) $Y^2 - X^3 - X^2$
  (c) $(X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
  (d) $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

(3) Encuentre los puntos singulares y las rectas tangentes en ellos de cada una de las siguientes curvas:
  (a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$
  (b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$
  (c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$
  (d) $Y^2 + (X^2-5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

(4) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, sea $f \in K[x,y]$ y sea p un punto singular de la curva afín $C(f)$ definida por f. Decimos que p es un *nodo* si f tiene multiplicidad dos en p y su forma inicial es producto de dos factores lineales distintos. Pruebe que p es un nodo si y sólo si tiene multiplicidad al menos dos en $C(f)$ y $f_{xy}^2(p) \neq f_{xx}(p)f_{yy}(p)$.

(5) Muestre que la curva en $\mathbb{R}^2$ definida en coordenadas polares por

$$r = 4a\cos^3 \tfrac{1}{3}\theta, \quad -\tfrac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \tfrac{3}{2}\pi$$

es una séxtica de ecuación

$$4(x^2+y^2-ax)^3 = 27a^2(x^2+y^2)^2.$$

Esta curva es conocida como la *séxtica de Cayley.*

(6) Sea $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ definida por

$$\lambda(t) = (a\sin(nt+d), b\sin(t))$$

denominada "curva de Lissajous" (en versión compleja) con parámetros a, b, n, d.
  (a) Haga gráficos de la imagen de λ (restringida a los reales) para varios valores de los parámetros (reales). Sugerencia: Se puede utilizar computadora, para visualizar las diversas formas que se obtienen variando los parámetros.
  (b) (opcional) Demostrar que si n es racional entonces el conjunto imagen de λ es una curva algebraica. Sugerencia: Algunos cálculos se pueden facilitar utilizando la función exponencial compleja.

(7) Exhibir para cada $d > 0$ un polinomio irreducible $f_d \in K[X,Y]$ de grado d. Exhibir también un polinomio irreducible no-singular de grado d. Sugerencia: Usar el criterio de Eisenstein.

(8) Probar que $F = Y^2 + X^2(X-1)^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ es un polinomio irreducible, pero que $V(F)$ es reducible. Qué pasa con el mismo polinomio sobre $\mathbb{C}$?

(9) Si una curva de grado d tiene un punto p de multiplicidad d, probar que la curva es la unión de d rectas que pasan por p (no necesariamente distintas).

(10) Sea $T : k^2 \to k^2$ una *aplicación polinómica*, esto es, una función $k^2 \to k^2$ tal que existen T_1, $T_2 \in k[X,Y]$ con $T(x,y) = (T_1(x,y), T_2(x,y))$ para todo $(x,y) \in k^2$. Si $f \in k[X,Y]$, definimos $f^T \in k[X,Y]$ poniendo

$$f^T(X,Y) = f(T_1(X,Y), T_2(X,Y)).$$

Denotamos por $m_p(f)$ la multiplicidad de f en $p \in k^2$.

(a) Sea $q \in k^2$ y $p = T(q)$. Probar que si la matriz jacobiana de T en q es inversible, entonces $m_q(f^T) = m_p(f)$.

(b) Mostrar que la implicación recíproca es falsa. Para verlo, considere la función tal que $T(X,Y) = (X^2, Y)$, el polinomio $f = Y - X^2$ y $p = q = (0,0)$.

(11) Calcule las direcciones asintóticas y las asíntotas de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:

(a) $X^2 - Y^2 - 1$

(b) $X^2 + Y^2 - 1$

(c) $Y - X^2$

(d) $Y^2 - X^2 + X^3$

(e) $Y^2 - X^3 + X$

(f) $X^n + Y^n - 1$

(g) $X^n - Y^m$

(h) $Y^2 - f(X)$, con $f \in k[X]$ de grado n.

(12) (a) Probar que si f_r, $f_{r+1} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ son dos polinomios homogéneos de grados r y $r+1$, respectivamente, y sin factores comunes, entonces $f = f_r + f_{r+1}$ es irreducible.

(b) Probar que, dadas rectas $L_1, \ldots, L_m$ en k^2 que pasan por el origen y enteros no negativos $r_1, \ldots, r_m$, existen curvas irreducibles que tienen a cada L_i como recta tangente de multiplicidad r_i. Sugerencia: Si para cada $i = 1, \ldots, m$, f_i es una ecuación de la recta L_i, considerar $f = f_r + f_{r+1}$ donde $f_r = \prod_{i=1}^m f_i^{r_i}$ y f_{r+1} es apropiado.

(13) Sea k un cuerpo y d un número natural. Denotamos

$$k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d} = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] / \operatorname{gr}(f) \leq d\} \cup \{0\}$$

el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a d, incluyendo el polinomio nulo. Asimismo denotamos

$$k[X_1, \ldots, X_n]_d$$

el conjunto de los polinomios homogéneos de grado d.

(a) Demostrar que $k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d}$ y $k[X_1, \ldots, X_n]_d$ son subespacios vectoriales de $k[X_1, \ldots, X_n]$. El conjunto de los monomios que tienen grado a lo sumo d es una base de $k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d}$, y el conjunto de los monomios de grado d es una base de $k[X_1, \ldots, X_n]_d$.

(b) Mostrar que

$$\dim k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d} = \binom{n+d}{d} \quad \text{y} \quad \dim k[X_0, \ldots, X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

(14) Probar que si $f \neq 0$ en $k[X_1, \ldots, X_n]$, entonces

$$f \in k[X_1, \ldots, X_n]_d \iff f(tX_1, \cdots, tX_n) = t^d f(X_1, \cdots, X_n).$$

A la derecha, la igualdad es entre elementos de $k[t, X_1, \cdots, X_n]$.

(15) Probar que si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]_d$, entonces vale la "fórmula de Euler",

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = dF.$$

(16) (a) Mostrar que si F, $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ son polinomios homogéneos de grados r y s, respectivamente, entonces FG es homogéneo de grado $r + s$.
(b) Todo factor de un polinomio homogéneo es homogéneo.

(17) *Homogeneización y deshomogeneización de polinomios.*
Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, sea $F_* \in k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ el polinomio

$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$

Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ es un polinomio de grado d, sea $f^* \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ dado por

$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big).$$

(a) Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, encuentre expresiones explícitas para los coeficientes de F_* y de f^*.
(b) Muestre que si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $G \in k[X_0, \dots, X_n]_e$, y f, $g \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $(FG)_* = F_*G_*$ y $(fg)^* = f^*g^*$.
(c) Muestre que si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $(f^*)_* = f$.
(d) Muestre que si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y r es la mayor potencia de X_0 que divide a F, entonces $X_0^r(F_*)^* = F$.
(e) Muestre que si F, $G \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y f, $g \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $(F + G)_* = F_* + G_*$ y $X_0^t(f + g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$, con $d = \operatorname{gr} f$, $e = \operatorname{gr} g$ y $t = d + e - \operatorname{gr}(f + g)$.

(18) Sea $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ un polinomio no divisible por X_0 y sea $f = F_*$, como en el ejercicio anterior. Pruebe las siguientes afirmaciones:
(a) Los polinomios f y F tienen el mismo grado.
(b) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.
(c) Hay una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f. En particular, F es irreducible si y sólo si f lo es.

(19) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Demostrar que si $F \in k[X, Y]_d$, entonces existen $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in k$ tales que $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ para todo i y

$$F(X, Y) = \prod_{i=1}^{d}(a_i X + b_i Y).$$

(20) Mostrar que si k es un cuerpo infinito, entonces un polinomio $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tal que $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ es nulo. Dar contraejemplos si k es finito.

(21) Sean n, m dos números naturales, sea A un dominio de integridad y sean $f, g \in A[X]$ dos polinomios de grados $\leq n$ y $\leq m$ respectivamente, digamos

$$f = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n, \quad g = g_0 + g_1 X + \cdots + g_m X^m.$$

La *resultante* de f y g es el determinante

$$R_{n,m}(f, g) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n \\ g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & & \\ & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m \end{vmatrix};$$

Notemos que se trata de una matrix $(m+n) \times (m+n)$ (denominada *matriz de Sylvester*). Supongamos que A es un DFU y que $f_n \neq 0$ y $g_m \neq 0$. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) f y g tienen un factor común de grado positivo.

(b) Existen polinomios no nulos ϕ, $\psi \in A[X]$, de grados menores que n y que m, respectivamente, tales que $\psi f = \phi g$.
(c) $R_{n,m}(f, g) = 0$.
Observación: Si $f_n = g_m = 0$ entonces $R_{n,m}(f, g) = 0$.

(22) Sea A un dominio de integridad. Mostrar que si f, $g \in A[X]$, entonces existen p, $q \in A[X]$ tales que $R(f, g) = pf + qg$.

(23) Sea k un cuerpo. Podemos pensar a los elementos de $k[X, Y] = k[X][Y]$ como elementos de $A[Y]$ con $A = k[X]$. Si f, $g \in k[X, Y]$, podemos entonces calcular la resultante de f y g *como polinomios en* Y: la notamos $R_Y(f, g) \in k[X]$.

Enuncie los resultados del ejercicio 21 en este caso especial. En particular, pruebe que si k es algebraicamente cerrado y $a \in k$, entonces

$$R_Y(f, g)(a) = 0 \iff \exists b \in k : f(a, b) = g(a, b) = 0.$$

Generalice esto a la situación en que f, $g \in k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$.

(24) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $f, g \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Supongamos que f es irreducible. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) Se tiene que $C(f) \subseteq C(g)$ si y solamente si f divide a g.
(b) Si g también es irreducible y $C(f) = C(g)$, entonces $f = ug$ con $u \in k^\times$.
(c) Exhiba un contraejemplo de la última afirmación cuando el cuerpo de base no es algebraicamente cerrado.

(25) Sean F, $G \in k[X_0, X_1, \dots, X_n] = k[X_1, \dots, X_n][X_0]$ dos polinomios homogéneos de grados d y e, respectivamente. Probar que si

$$R = R_{X_0}(F, G)$$

es la resultante de F y G con respecto de X_0, entonces R es un elemento de $k[X_1, \dots, X_n]$ homogéneo de grado de.

(26) Probar que si f, $g \in k[X]$ son polinomios mónicos con coeficientes en un cuerpo k, con factorizaciones $f = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ y $g = \prod_{j=i}^{m}(x - \beta_j)$ en $k[X]$, entonces

$$R(f, g) = u \prod_{1 \leq i,j \leq n} (\alpha_i - \beta_j)$$

para algún $u \in k^\times$ que depende solamente de n y de m.

(27) Sea A un dominio de integridad y sean f, $g \in A[X]$ dos polinomios mónicos. Sea $\varphi : A[X]/(g) \to A[X]/(g)$ el homomorfismo de A-módulos tal que $\varphi(\overline{h}) = \overline{fh}$ para todo $h \in A[X]$. Muestre que $\det(\varphi) = R(f, g)$. Observe que como el A-módulo $A[X]/(g)$ es *libre*, esto tiene sentido.

(28) Sea $f \in k[X, Y]$ un polinomio de grado d y sea $C = C(f)$ la curva afín plana que determina. Mostrar que si L es una recta en k^2 que no está contenida en C, entonces el conjunto $L \cap C$ es finito y tiene a lo sumo d puntos.

(29) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio no constante. Mostrar que el conjunto $k^n \setminus C(f)$ es infinito si $n \geq 1$ y $C(f)$ es infinito si $n \geq 2$.

(30) (a) Probar que una curva plana irreducible posee un número finito de puntos singulares.
(b) ¿Es esto cierto para hipersuperficies en k^n, $n \geq 3$?