Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2017

Curvas en el espacio

(1) Pruebe que si una curva regular satisface una de las siguientes condiciones entonces es una recta:
  (a) Todas las tangentes a la curva inciden en un punto.
  (b) Todas las tangentes a la curva son paralelas entre sí.

(2) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y $[a, b] \subset I$ un subintervalo cerrado de I. Para cada partición $P = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ de $[a, b]$, consideremos la suma

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

y notemos $|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$ a la norma de P. Pruebe que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|P| < \delta \implies |\int_a^b |\alpha'(t)|dt - l(\alpha, P)| < \epsilon.$$

(3) Dé condiciones suficientes para que el sistema

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$$

determine una curva regular y determine el vector tangente unitario.

(4) Pruebe que, si κ es la curvatura de una curva α, entonces su torsión es

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle}{\kappa^2(s)|\alpha'|^6}.$$

(5) Muestre que las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' &= \phantom{-\kappa\mathbf{T}} \quad \kappa\mathbf{N} \\
\mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} \qquad\qquad + \tau\mathbf{B} \\
\mathbf{B}' &= \phantom{-\kappa\mathbf{T}} \quad -\tau\mathbf{N}
\end{aligned}$$

pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' &= \omega \times \mathbf{T} \\
\mathbf{N}' &= \omega \times \mathbf{N} \\
\mathbf{B}' &= \omega \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

con $\omega = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$.

Observación: Cuando un cuerpo rígido (un trompo o una piedra, por ejemplo) gira alrededor de un punto existe un "eje instantáneo de rotación" que es el lugar de los puntos que están fijos es ese instante. Si pensamos en el triedro de Frenet fijo al cuerpo rígido, el eje instantáneo está dado por ω.

(6) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva no necesariamente parametrizada por la longitud de arco y sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de α por la longitud de arco $s = s(t)$ medido desde $t_0 \in I$. Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y denotemos $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \alpha'$, $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \alpha''$ y $\frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}t^3} = \alpha'''$. Pruebe las siguientes igualdades:
  (a) $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\alpha'|}$ y $\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\langle\alpha',\alpha''\rangle}{|\alpha'|^3}$;
  (b) la curvatura de α en t es $\kappa(t) = \frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}$;
  (c) la torsión de α en t es $\tau(t) = \frac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{|\alpha'\times\alpha''|^2}$.

(7) Calcule la curvatura y la torsión de las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$:
  (a) (u, u^2, u^3);
  (b) $(u, \frac{1+u}{u}, \frac{1-u^2}{u})$;
  (c) $(x, f(x), g(x))$;
  (d) $(a(u - \sin(u)), a(u - \cos(u)), bu)$;
  (e) $(a(3u - u^3), 3au^2, a(3u + u^3))$.

(8) Una función $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *translación* si existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $A(x) = x + v$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Una función lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *transformación ortogonal* si $\langle\rho(u), \rho(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para cada par de vectores u, $v \in \mathbb{R}^3$. Finalmente, una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un *movimiento*

rígido si es la composición de una transformación ortogonal de determinante positivo y una translación. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) La norma de un vector y el ángulo entre dos vectores son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.

(b) El producto vectorial de dos vectores es *covariante*, de manera que

$$T(u) \times T(v) = T(u \times v)$$

si u, $v \in \mathbb{R}^3$, con respecto a transformaciones ortogonales T con determinante positivo. ¿Qué ocurre con las transformaciones ortogonales de determinante negativo?

(c) La longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.

(9) Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una *hélice* si existe una dirección con la cual todas sus tangentes forman un ángulo constante.

(a) Si $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) la curva α es una hélice;

(ii) el cociente $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante;

(iii) las rectas normales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector normal— son todas paralelas a un plano fijo;

(iv) las rectas binormales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector binormal— forman un ángulo constante con una dirección fija.

(b) Muestre que si $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c son tales que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces la curva

$$\alpha(s) = (a\cos(\tfrac{s}{c}), a\sin(\tfrac{s}{c}), b\tfrac{s}{c})$$

es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = -\frac{a}{b}$.

(10) Muestre que la curva $u \mapsto (a\sin^2(u), a\sin(u)\cos(u), a\cos(u))$ está sobre una esfera y todos sus planos normales pasan por el origen. Se trata de una curva cuártica.

(11) Sea α una curva en $\mathbb{R}^3$ con curvatura y torsión nunca nulas y $\kappa' \neq 0$. Pruebe que α está contenida en una esfera de radio r si y sólo si

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = r^2.$$

(12) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado no trivial y $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si v es un vector unitario v, entonces

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

(b) En particular, si $v = \frac{q-p}{|q-p|}$, tenemos que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

Deduzca que la curva con menor longitud de arco que une los puntos p y q es la línea recta.

(13) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura y torsión nunca nulas, $s_0 \in \mathbb{R}$ y P un plano que satisface las siguientes dos condiciones:

- P contiene la recta tangente en s_0.
- para todo entorno $I \subset \mathbb{R}$ de s_0, existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P.

Muestre que P es el plano osculador de α en s_0.

(14) Demuestre que basta con que se cumpla alguna de las siguientes dos condiciones para poder asegurar que una curva es plana:

(a) Sus planos osculadores pasan todos por un punto.

(b) Sus planos osculadores son paralelos.

(15) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco con curvatura y torsión nunca nulas. Decimos que α es una *curva de Bertrand* si existe una curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de α y β en puntos correspondientes de I coinciden. En ese caso β es la *compañera de Bertrand* de α y puede escribirse en la forma

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) En esa expresión para β, r es constante.

(b) α es una curva de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa + B\tau = 1$$

con A y B constantes no nulas.

(c) Si α tiene más de una compañera de Bertrand, entonces tiene infinitas y esto ocurre si y sólo si α es una hélice circular.