CURVAS PARAMETRICAS EN $\mathbb{R}^n$

Def Una curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$ (de clase $\mathcal{C}^r$, $r=0,1,2,\dots,\infty$) es una aplicación $f: I \to \mathbb{R}^n$ (de clase $\mathcal{C}^r$) donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo

$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad t \in I$

$f_i: I \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^r$

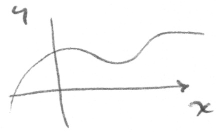
Ej

1) $f = cte$

2) f lineal afín: $f(t) = t.a + b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$

3) $f: I \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(t) = (x(t), y(t))$ curva plana.

ej. $f(t) = (t, g(t))$ donde $g: I \to \mathbb{R}$



$x = t$
$y = g(t)$

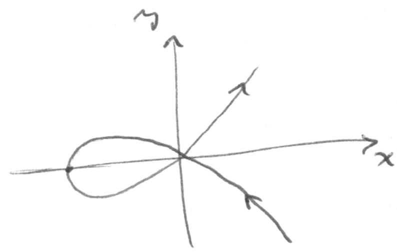
ej. $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(t \in \mathbb{R})$

4) $f(t) = (x(t), y(t), t)$

hélice con base la curva plana $(x(t), y(t))$

5) $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$

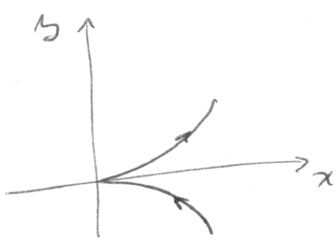
vale: $f(1) = f(-1) = (0,0)$



$f|_{\mathbb{R}-\{-1,1\}}$ inyectiva

$x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t$
curva ALFA

6) $f(t) = (t^2, t^3)$



Def Dos curvas paramétricas

$$f: I \to \mathbb{R}^n, \quad g: J \to \mathbb{R}^n$$

~~[illegible]~~

son equivalentes por cambio de parámetro (escrito $f \sim g$) si existe un difeomorfismo

$I \xrightarrow{\sigma} J$ tal que $f = g \circ \sigma$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R}^n \\ J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ej
$(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$
$(\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2))$ $(t>0)$

Prop $\sim$ es relación de equivalencia.

Dem ejercicio.

Obs si I, J son intervalos ($\Rightarrow$ conexos) entonces un tal σ satisface $\sigma'(t) > 0 \ \forall t$ o $\sigma'(t) < 0 \ \forall t$ (difeo directo o inverso, creciente o decreciente)

Obs $f \sim g \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(g)$
$\not\Leftarrow$

(idea de movimiento)

Obs $\forall$ Todo intervalo abierto conexo $J \subset \mathbb{R}$
$\exists$ difeo (directo) $\sigma: I = (0,1) \to J$
(puedo tomar $\sigma(t) = \alpha t + \beta$, si J es acotado)
$\Rightarrow$ toda $g: J \to \mathbb{R}^n$ es $\sim$ a una $f: (0,1) \to \mathbb{R}^n$

(También puedo "normalizar" en $I = (-1,1)$, etc.)

Similar para intervalo cerrado.

Def Sea $f: I \to \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica.

Decimos que $t_0 \in I$ es punto singular si $f'(t_0) = 0$

$$f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$$

Ej $f(t) = (t^2, t^3)$ $\quad t_0 = 0$

$f(t) = (t^2, t^4)$ $\quad t_0 = 0$

> **Def** Recta tangente a t_0
> $x = f(t_0) + \lambda f'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
> (t_0 regular)
> Hiperplano normal a f a t_0
> (t_0 regular)

~~Decimos que f~~

Decimos que f es regular en I si no existe $t_0 \in I$ punto singular.

Def $f'(t_0)$ = vector velocidad de f en $t_0 \in I$.
$|f'(t_0)|$ = " " "

Prop Son equivalentes:

a) $f: I \to \mathbb{R}^n$ es regular

b) existe $g: J \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \sim g$, ~~regul~~ $|g'(s)| = 1 \quad \forall s \in J$

(g representa un movimiento con "velocidad constante = 1") Rtollo

$$|v| = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2}$$

Dem b) $\Rightarrow$ a) Sup. $\exists\, \sigma: I \to J \;/\; f(t) = g(\sigma(t))$, $t \in I$

$\Rightarrow f'(t) = g'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \Rightarrow |f'(t)| = \underbrace{|g'(\sigma(t))|}_{=1} \cdot \underbrace{|\sigma'(t)|}_{\neq 0}$

$\Rightarrow |f'(t)| \neq 0 \Rightarrow f'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

a) $\Rightarrow$ b) Defino $\sigma: I \to J$. Elijo $t_0 \in I$ y sea

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(t)|\,dt$$

("función longitud de arco de f" medida desde t_0) definir longitud de arco

Vale: $\sigma'(t) = |f'(t)| > 0 \quad \forall t \Rightarrow \sigma: I \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente $\Rightarrow \sigma: I \to J = \sigma(I)$ difeo.

Sea $g = f \circ \sigma^{-1}$. Es claro que $f \sim g$.

Además afirmo: $|g'| \equiv 1$

En efecto: $f = g \circ \sigma \Rightarrow f'(t) = g'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$

$\Rightarrow |f'(t)| = |g'(\sigma(t))| \cdot |\sigma'(t)| \Rightarrow |g'(\sigma(t))| = 1 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow |g'(s)| = 1, \forall s \in J$. ✓

<u>Obs</u> Se dice que g fue obtenida de f vía re-parametrización por longitud de arco.

(ejercicios práctica: longitud de arco de elipse)
integrales elípticos $\quad x = a\cos t$ ...
$\quad y = b \operatorname{sen} t$

CURVAS PARAMETRICAS EN $\mathbb{R}^2$

$f: I \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (x(t), y(t))$

Sup. f parametrizada por longitud de arco,

o sea, $|f'(t)| = 1 \quad \forall t$, o sea, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1, \quad \forall t \in I$.

<u>Def 1</u> $\kappa_f(t) = |f''(t)| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2}$

Función curvatura de f: $\kappa_f: I \to \mathbb{R}$

<u>Ej</u> $f(t) = at + b \quad (a, b \in \mathbb{R}^2) \Rightarrow \kappa_f \equiv 0$

<u>Ej</u> $f(t) = (R\cos t, R \operatorname{sen} t)$

$f'(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t)$

$f''(t) = (-R\cos t, -R\operatorname{sen} t) \Rightarrow \kappa_f \equiv 1/R$

<u>Def 2</u> Sea $f: I \to \mathbb{R}^2$ regular ($f'(t) \neq 0 \quad \forall t$)
$f(t) = (x(t), y(t))$

$$\kappa_f(t) = \frac{\left|\begin{matrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{matrix}\right|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

*

Prop $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ $\quad f = g \circ \sigma$ ~~[illegible]~~

1)
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R}^2 \\ J \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Generaliza a curvas en $\mathbb{R}^n$

Entonces $k_f = k_g \circ \sigma$

(Buen comportamiento de k_f respecto a cambio de parámetro)

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "k_f"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R} \\ J \arrow[ur, "k_g"'] & \end{tikzcd}$$

Dem
$$f'(t) = g'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$
$$f''(t) = g''(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)^2 + g'(\sigma(t)) \cdot \sigma''(t)$$

$$\Rightarrow \quad |f'(t)| = |g'(\sigma(t))| \cdot |\sigma'(t)| \quad y$$

$$\det(f', f'') = \sigma'(t)^3 \cdot \det(g', g'')$$ (operación de filas)

$$\Rightarrow \quad \frac{|\det(f', f'')|}{|f'|^3}(t) = \frac{|\det(g', g'')|}{|g'|^3}(\sigma(t)) \quad ✓$$

2) La k_f de Def 2 se reduce a la de Def 1 cuando $|f'| \equiv 1$

3) ~~[illegible]~~ es la única k_f de Def 2 que satisface 1), 2)

Ejercicio Suponiendo la validez de la Prop. deducir Def 2 de Def 1. (usar ~~[illegible]~~ misma cuenta que la dem de Prop.)

(práctica: def. de radio de curvatura, círculo osculador)

Def $f: I \to \mathbb{R}^2$ $\quad \tilde{k}_f(t) = \dfrac{\det(f', f'')}{|f'|^{3/2}}$

$\tilde{k}_f : I \to \mathbb{R}$ "curvatura con signo"

Obs $\tilde{k}_f(t) > 0$ $(= k_f(t))$ cuando $\det(f', f'')(t) > 0$

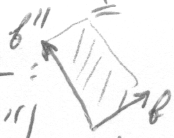
o sea, $\{f'(t), f''(t)\}$ tiene la orientación de $((1,0), (0,1))$

Obs La Prop. anterior se modifica:

$\tilde{k}_f = \pm \tilde{k}_g \circ \sigma$ $\quad$ ($+$ cuando $\sigma' > 0$, $-$ cuando $\sigma' < 0$)

2) Ejercicio

(usar: $x'^2+y'^2=1 \Rightarrow x'x''+y'y''=0$)



También: área $=|f''|$ porque $f'\cdot f''=0$, $|f'|=1$

3) Dado $f: I \to \mathbb{R}^2$ reg   Sea $\bar{\kappa}_f$ otra fórmula.

$$\sigma(t)=\int_{t_0}^{t}|f'(t)|\,dt \quad , \quad g=f\circ\sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow |g'|\equiv 1 \Rightarrow \bar{\kappa}_g=|g''| \quad (\text{por } 2))$$

Por 1): $\bar{\kappa}_f=\bar{\kappa}_g\circ\sigma=|g''|\circ\sigma$

$$\bar{\kappa}_f(t)=|g''(\sigma(t))|$$

$$f(t)=g(\sigma(t)) \qquad (\alpha)$$

$$f'(t)=g'(\sigma(t)).\sigma'(t)$$

$$f''(t)=g''(\sigma(t)).\sigma'(t)^2+g'(\sigma(t)).\sigma''(t)$$

$$=g''(\sigma(t)).\sigma'(t)^2+\frac{f'(t)}{\sigma'(t)}.\sigma''(t)$$

$$\to g''(\sigma(t))=\left(f''(t)-f'(t).\frac{\sigma''(t)}{\sigma'(t)}\right).\frac{1}{\sigma'(t)^2} \qquad (\beta)$$

$$\sigma'(t)=|f'(t)|=(f'.f')^{1/2}$$

$$\sigma''(t)=\frac{1}{2}.(f'.f')^{-1/2}.2(f'.f'')=\frac{(f',f'')}{|f'|}$$

$$\to g''(\sigma(t))=(f''.\sigma'-f'\sigma'')\frac{1}{\sigma'^3}=$$

$$=f''.|f'|-f'.\frac{(f',f'')}{|f'|}$$

Vimos recién: $|g''|=\det(g',g'')\underset{(\alpha)(\beta)}{=}\det(f',f'').\frac{1}{\sigma'^3}$

$$=\det(f',f'').\frac{1}{|f'|^3}$$

Otro modo de pensar κ_f:

κ_f mide ~~[illegible]~~ de la recta tangente por la variación

unidad de longitud de arco.

Más precisamente: $f(t) = (x(t), y(t))$

pendiente de la recta tangente a $f(t)$ $= \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

$\theta(t)$ = ángulo entre recta tangente a $f(t)$ y eje x

$= \arctan \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Afirmo: $\boxed{\kappa_f(t) = \dfrac{d}{ds}\theta(t)}$

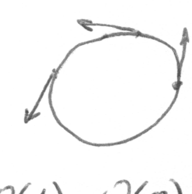
$$\frac{d}{ds}\theta(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)'\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\cdot\frac{(y''x'-y'x'')}{x'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{y''x'-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \underset{def}{=} \kappa_f(t)$$

$\Longrightarrow$ (?) Si ~~Diff~~ $f: I \to \mathbb{R}^2$ es una curva regular, cerrada, simple, parametrizada por long. de arco $\quad I = [0,1]$

$(f'(t)\neq 0, \forall t, \quad f(0)=f(1), \quad f|_{[0,1)}$ inyectiva$)$

entonces $\displaystyle\int_0^1 \kappa_f(t)\,dt = 2\pi$



"Dem (?)": $\displaystyle\int_0^1 \kappa_f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d\theta(t)}{dt}\,dt = \theta(1)-\theta(0) \overset{\pm}{\underset{?}{=}} 2\pi$

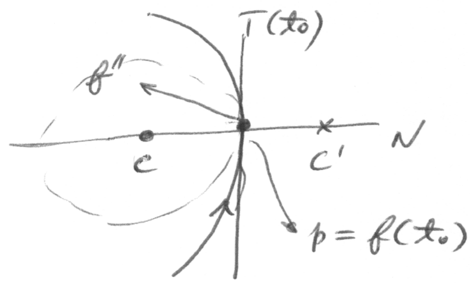
Def (círculo osculador) $f: I \to \mathbb{R}^2$

Sea $t_0 \in I$ / $k_f(t_0) \neq 0$

Definimos entonces $\rho_f(t_0) = \dfrac{1}{k_f(t_0)}$ (radio de curvatura de f en t_0)

Sea $N(t_0)$ la recta normal a f en t_0

($\underset{def}{=}$ recta por $f(t_0)$ perpendicular a la recta $T(t_0)$.)



Hay dos puntos $c, c' \in N$

tales que $|p-c| = |p-c'| = \rho(t_0)$

Denotemos c ~~del que está~~ el que está "del lado de la curvatura",

esto es $f''\cdot(c-p) > 0$ $\quad$ ($f''\cdot(c'-p) < 0$)

$c \underset{def}{=}$ centro de curvatura. (de f en t_0)

círculo de curvatura $\underset{def}{=}$ círculo con centro c y radio $\rho_f(t_0)$

Nota: si $|f'| \equiv 1$ entonces $f''\cdot f' = 0$ y $c = f(t_0) + f''(t_0)/|f''(t_0)|^2$

CURVAS EN $\mathbb{R}^2$ DADAS EN FORMA IMPLÍCITA

Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^∞

Consideramos el conjunto $\mathcal{C}(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / F(x,y) = 0\}$

Ej $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \to \mathcal{C}(F) =$ círculo

Decimos que $(x_0,y_0) \in \mathcal{C}(F)$ es un punto singular de F

si $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

Obs: Es un conjunto, no hay parametrización (movimiento)

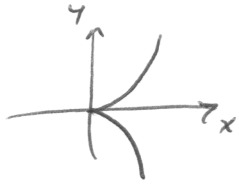
Def Si F es tal que $\mathcal{C}(F)$ tiene a lo sumo un número finito de puntos singulares, diremos que $\mathcal{C}(F)$ es una curva dada en forma implícita (vía F).

Ej $F(x,y) = y^2 - x^3$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ es el único punto singular

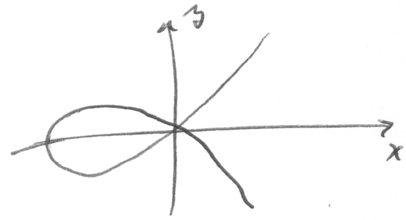
$\mathscr{C}(F)$



(no hay "movimiento")
$\mathscr{C}(F)$ es un conjunto

Ej $F(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$

$\mathscr{C}(F)$



(verificar)

$y^2 = x^2 + x^3 = x^2 \cdot (x+1)$

$y = \pm |x| \cdot \sqrt{x+1}$

Def (orden de contacto)

Sea $\mathscr{C}(F)$ una curva dada en forma implícita.

Sea $f : I \to \mathbb{R}^2$ una curva paramétrica.

Supongamos que $t_0 \in I$ es tal que $f(t_0) \in \mathscr{C}(F)$

(o sea, $f(t) = (x(t), y(t))$, $F(x(t_0), y(t_0)) = 0$)

El orden de contacto entre f y $\mathscr{C}(F)$ en t_0,

denotado $(f,F;t_0)$ se define como

$$(f,F;\, t_0) = \operatorname{ord}_{t_0}(F \circ f) \in \mathbb{N}$$

Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, definimos $\operatorname{ord}_{t_0}(\varphi) = r$ si

$$\varphi(t_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \cdots = \frac{d^{r-1}\varphi}{dt^{r-1}}(t_0) = 0, \qquad \frac{d^r\varphi}{dt^r}(t_0) \neq 0$$

Ej Orden de contacto de f con una recta. L

$\boxed{\text{la tangente es la recta con mayor orden de contacto}}$

verificar: $(f,L;t_0) = 0$ si $f(t_0) \notin L$

(suponiendo f regular en t_0) $= 1$ $\quad f(t_0) \in L$, $L \neq T_f(t_0)$.

≥ 2 $\quad L = T_f(t_0)$

Práctica: orden de contacto del círculo osculador es ≥ 3.
Este círculo es el de mayor orden de contacto.

VOLVEMOS A $f: I \to \mathbb{R}^n$

Def Recta tangente a f en t:

$$f(t) + \langle f'(t) \rangle$$

Plano osculador a f en t:

$$f(t) + \langle f'(t), f''(t) \rangle$$

k-plano osculador a f en t:

$$f(t) + \langle f'(t), f^{(2)}(t), \dots, f^{(k)}(t) \rangle$$

suponiendo que $f'(t), \dots, f^{(k)}(t)$ son l.i. en $\mathbb{R}^n$

("f es k-regular en t")

Sup. f n-regular en t

($\Rightarrow$ k-regular $\forall\, k \leq n$)

Tomemos entonces para cada $t \in I$

$$\{f(t)\} = T_0(t) \subset T_1(t) \subset \dots \subset T_{n-1}(t) \subset T_n(t) = \mathbb{R}^n$$

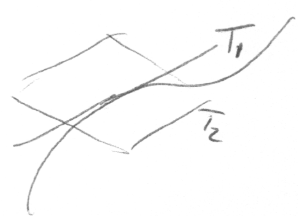
cadena de espacios osculadores, $\dim S_i(t) = i$

También tenemos los subespacios ortogonales

$$N_i = S_i^{\perp} = f(t) + \langle f'(t), \dots, f^{(i)}(t) \rangle^{\perp}$$ $\dim N_i = n-i$

$$\mathbb{R}^n \supset N_1(t) \supset \dots \supset N_{n-1}(t) \supset \{0\}$$

$n=2$ recta tg,
recta normal



$n=3$ T_1 recta tg $\subset$ plano osculador $= T_2$

N_1 = plano, $\supset$ N_2 = "recta binormal"

CURVATURA I TORSION

Sea $f: I \to \mathbb{R}^n$ con $|f'(t)| = 1$ $\forall t$

<u>Def 1</u> $k_f(t) = |f''(t)|$

$k_f : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ curvatura de f.

<u>Def</u> si $|f'(t)| \not\equiv 1$ sea $f(t) = g(\sigma(t))$ con $|g'(s)| = 1$ $\forall s$

Entonces definimos $k_f(t) = k_g(\sigma(t)) = |g''(\sigma(t))|$

<u>Vale</u> (práctica) $$k_f(t) = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

para $n = 2, 3$

(fórmula para $n > 3$?)

<u>Lema</u> Sea $h : I \to \mathbb{R}^n$ con $|h(t)| = 1$ $\forall t$

(o sea, $\operatorname{im}(h) \subset S^{n-1}$)

Entonces $h'(t) \perp h(t)$ $\forall t$. $\quad (h'(t) \cdot h(t) = 0)$

<u>Dem</u> $|h(t)| = 1 \to h(t) \cdot h(t) = 1$ $\forall t$

$\to \frac{d}{dt}(h(t) \cdot h(t)) = 0$ $\forall t$

$\to h'(t) \cdot h(t) + h(t) \cdot h'(t) = 2\, h'(t) \cdot h(t) = 0$

Sea ahora $f : I \to \mathbb{R}^3$. Sup. $|f'(t)| = 1$ $\forall t$

Notación: $T(t) = f'(t)$ $\quad (|T| \equiv 1)$

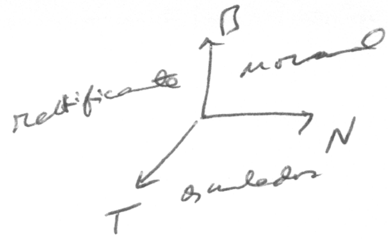
$N(t) = \dfrac{f''(t)}{|f''(t)|}$ $\quad ($; $\underset{\text{lema}}{N \cdot T = 0})$

(definido si $k_f(t) = |f''(t)| \neq 0$)

$B(t) = T(t) \times N(t)$ (vector binormal $\Rightarrow |B| = 1,\ B \cdot N = 0,\ B \cdot T = 0$)

Obs

T es base de (ortonormal)	T_1	(trasladado al origen)
T, N	T_2	
B	N_2	
N, B	N_1	



$\forall t \in I$ $T(t), N(t), B(t)$ se llama "triedro de Frenet" de f en t ~~(...)~~ Es una base (ortonormal) ordenada de $\mathbb{R}^3$, para cada $t \in I$.

Quiero escribir T', N', B' como combinación lineal de T, N, B.

$T' = \kappa N$ de las definiciones

$B' = (T \times N)' = T' \times N + T \times N' = \cancel{\kappa N \times N} + T \times N'$

$\Rightarrow B' \perp T$

Lema $\Rightarrow B' \perp B \Rightarrow B' = -\tau N$

para una función $\tau : I \to \mathbb{R}$ $\quad \tau = \tau_f$ torsión de f

(τ mide la variación de B, o sea,
τ mide la variación del plano osculador)

$N' \perp N$ (Lema) $\Rightarrow N' = \alpha T + \beta B$

$\alpha = N' . T = -N . T' = -\kappa N . N = -\kappa$

$\beta = N' . B = -N . B' = \tau N . N = \tau$

$\Rightarrow N' = -\kappa T + \tau B$

$$\left.\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B &= -\tau N \end{aligned}\right\} \text{Formulas de Frenet}$$

$$\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}$$ matrices 3×3

antisimétrica

Def $f: I \to \mathbb{R}^3$ $f = g\circ\sigma$, $|g'|\equiv 1$

$\tau_f(t) = \tau_g(\sigma(t))$

Vale (práctica): $$\tau_f(t) = -\frac{f'\times f''\cdot f'''}{|f'\times f''|^2} = -\frac{\det(f'\ f''\ f''')}{|f'\times f''|^2}$$

CONGRUENCIA

Def $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es una transformación afín si $\varphi(x)=l(x)+t$ donde $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}$-lineal y $t\in\mathbb{R}^n$.

Obs $t=\varphi(0)$, $l=\varphi-t$

$\Rightarrow t, l$ son únicos.

Obs φ biyectiva $\Leftrightarrow$ l biyectiva. (iso. lineal)

Def $A_n = \{\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ \varphi \text{ afín biyectiva}\}$

$(A_n,\circ)$ es un grupo llamado grupo lineal afín

(verificar: $\varphi,\psi\in A_n \Rightarrow \varphi\circ\psi\in A_n$)

Def Sea $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, $J \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$

dos curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$

Decimos que f es afínmente congruente a g

(escrito $f \equiv g$) si existen

$I \xrightarrow{\sigma} J$ (difeo.), $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \in A_n$

tales que

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

ver 15

Mejor parece trabajar con esta def. más particular

($\varphi \circ f = g \circ \sigma$, o sea $g = \varphi f \sigma^{-1}$)

Def (más general) Sea $G \subset A_n$ un subgrupo

Decimos que f es G-congruente a g ($f \underset{G}{\equiv} g$)

si $\exists\, \sigma$ difeo, $\varphi \in G$ / $\varphi \circ f = g \circ \sigma$

Ej $G = O_n$ = grupo ortogonal afín

$= \{ \varphi \in A_n,\ \varphi = l + t,\ l \text{ ortogonal} \}$

$l(x) = A.x \qquad A.A^t = I$

Problema general: dados f, g decidir

si son (G)-congruentes.

Obs problema similar:

1) equivalencia de matrices

2) semejanza de matrices

Mejor vamos a modificar la Def. de G-congruencia.

Sea $G \subset A_n$ un subgrupo.

Def Sea $f: I \to \mathbb{R}^n$, $g: I \to \mathbb{R}^n$ dos curvas paramétricas con mismo intervalo de definición.

Decimos que f es G-congruente a g ($f \underset{G}{\equiv} g$) si existe $\varphi \in G$ tal que $g = \varphi \circ f$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Obs si ~~[illegible]~~

$$\varphi(x) = A \cdot x + b \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad b \in \mathbb{R}^n$$

entonces la condición es

$$g(t) = A \cdot f(t) + b \qquad (*)$$

Prop $\underset{G}{\equiv}$ es relación de equivalencia

Prop $\dfrac{\text{Sup. } G \subset O_n}{f \underset{G}{\equiv} g} \Rightarrow |f'(t)| = |g'(t)| \ , \ \forall t \in I$

Dem Derivando $(*)$, $g'(t) = A \cdot f'(t)$

$|g'(t)| = |A \cdot f'(t)| = |f'(t)|$ ya que $A \in O_n$

Ahora fijo $G = O_n$ y escribo $\equiv$ en lugar de $\underset{O_n}{\equiv}$
(congruencia ortogonal)

<u>Prop</u> Sea $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$, $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$

Si $f \equiv g$ entonces $k_f = k_g$, $\tau_f = \tau_g$

(las cuatro son funciones $I \to \mathbb{R}$)

<u>Dem</u> Sup. $\exists\ \varphi \in \mathcal{O}_M$ / $g = \varphi \circ f$

$$g(t) = A \cdot f(t) + b \quad \Rightarrow$$

$$g'(t) = A \cdot f'(t)$$

$$g''(t) = A \cdot f''(t)$$

$$g'''(t) = A \cdot f'''(t)$$

$$k_g(t) = \frac{|g'(t) \times g''(t)|}{|g'(t)|^3} \quad , \quad \tau_g(t) = -\frac{\det(g'(t), g''(t), g'''(t))}{|g'(t) \times g''(t)|^2}$$

Vimos $|g'(t)| = |f'(t)| \quad \forall t \in I.$

Para $u, v \in \mathbb{R}^3$, A ortogonal, vale

$$A \cdot (u \times v) = \det A \cdot (A u \times A v)$$ (porque A preserva producto interno)

$$\Rightarrow \quad |g'(t) \times g''(t)| = |A \cdot f'(t) \times A \cdot f''(t)| =$$

$$= |A \cdot (f'(t) \times f''(t))| = |f'(t) \times f''(t)|$$

También: $[g', g'', g'''] = A \cdot [f', f'', f''']$ (producto de matrices 3×3)

$\rightarrow \det = \det \quad \Rightarrow \checkmark$

<u>Ejercicio</u> Buscar combinaciones de k_f, y τ_f que sean invariantes por homotecias.

(notar que k_f, τ_f no lo son)

Recíprocamente:

Proposición Sean $f: I \to \mathbb{R}^3$, $g: I \to \mathbb{R}^3$ (3-regulares)

Supongamos a) $|f'(t)| = |g'(t)| \quad \forall t \in I$

b) $k_f = k_g : I \to \mathbb{R}$

c) $\tau_f = \tau_g : I \to \mathbb{R}$

Entonces $f \equiv g$.

Obs Un caso en que vale a) es si

$|f'(t)| = 1 = |g'(t)| \quad \forall t \in I$

(i.e. ambas parametrizadas por long. de arco.)

Corolario (Teorema de clasificación ortogonal)

Sean $f: I \to \mathbb{R}^3$, $g: I \to \mathbb{R}^3$ dos curvas paramétricas

tales que $|f'(t)| = |g'(t)| \quad \forall t \in I$.

Entonces f y g son ortogonalmente congruentes

si y sólo si tienen la misma función

curvatura y torsión.

Dem. Prop.

a) $\Rightarrow$ f, g tienen la misma función

longitud de arco σ. Reemplazando f, g

por $f \circ \sigma^{-1}$, $g \circ \sigma^{-1}$: $J \to \mathbb{R}^3$

se siguen cumpliendo b), c). Además, si demuestro

que estas son $\equiv$ vale para f, g.

Puedo entonces suponer $|f'| \equiv 1$, $|g'| \equiv 1$

Escribo las fórmulas de Frenet

para f y para g.

Denoto $\begin{pmatrix} T_f \\ N_f \\ B_f \end{pmatrix} = F_f \qquad \begin{pmatrix} 0 & \kappa_f & 0 \\ -\kappa_f & 0 & \tau_f \\ 0 & -\tau_f & 0 \end{pmatrix} = K_f$

Frenet: $\quad F_f' = K_f \cdot F_f$

Sabemos que $\quad K_f = K_g = K$

$\Rightarrow \quad F_f' = K \cdot F_f \quad , \quad F_g' = K \cdot F_g$

~~Elijo $t_0 \in J$~~

~~$\exists! \, \varphi \in O_3 \quad \varphi \cdot F_g(t_0) = F_f(t_0)$~~

F_f es solución de la ecuación diferencial

ordinaria $\quad X' = K \cdot X$

(incógnita es una matriz 3×3 de funciones $J \to \mathbb{R}$)

(o pensando como sistema de 9 ecuaciones
9 incógnitas)

F_g es otra solución de la misma ecuación.

Teorema de EDO dice que $F_f = F_g$ si

coinciden en un punto $t_0 \in J$. (condición inicial)

Elijo $t_0 \in J$. Existe una matriz ortogonal A

tal que $\quad F_f(t_0) \cdot A = F_g(t_0)$

$\cancel{A_1} F_f \cdot A$ también es solución de $X' = K \cdot X$

y como coincide con F_g en t_0 resulta

$$\cancel{A_1} F_f \cdot A = F_g$$

En particular es $\cancel{A}\cdot T_f \cdot A = T_g$ (mirar 1ra fila)

o sea, $\cancel{A_1} f'(t) A = g'(t) \quad \forall t \in J$

Integrando: $\cancel{A_1} f^{\xi}(t) A + b = g(t)$ ✓

$\forall t \in I$

<u>Dem 2</u> (Suponiendo f, g analíticas)

Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ analítica

$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (cada coordenada es función analítica de t, p. ej. polinomio, sen t, etc.)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)\, t^i}{i!} \quad \text{para } |t| < \varepsilon$$

Sup. $|f'(t)| \equiv 1$

$T' = K N$, $N' = -K T + \tau B$, $B' = -\tau N$

$f'(0) = T(0)$

$f''(0) = K(0) \cdot N(0)$

$$f'''(0) = (K N)'(0) = K'(0) N(0) + K(0) N'(0)$$

$$= K'(0) N(0) + K(0) \left(-K(0) T(0) + \tau(0) B(0)\right)$$

$$= -K(0)^2 T(0) + K'(0) N(0) + K(0) \tau(0) B(0)$$

$$\Rightarrow f(t) = f(0) + \left(t - \frac{K_0^2 t^3}{6} + \cdots\right) T(0)$$

$$+ \left(\frac{K_0}{2} t^2 + \frac{K'(0)}{6} t^3 + \cdots\right) N(0)$$

$$+ \left(\frac{K_0 \tau_0}{6} t^3 + \cdots\right) B(0)$$

Derivando sucesivamente vemos que si conozco $\kappa(t), \tau(t)$ $(|t|<\varepsilon)$ y $T(0), N(0), B(0)$ entonces conozco f.

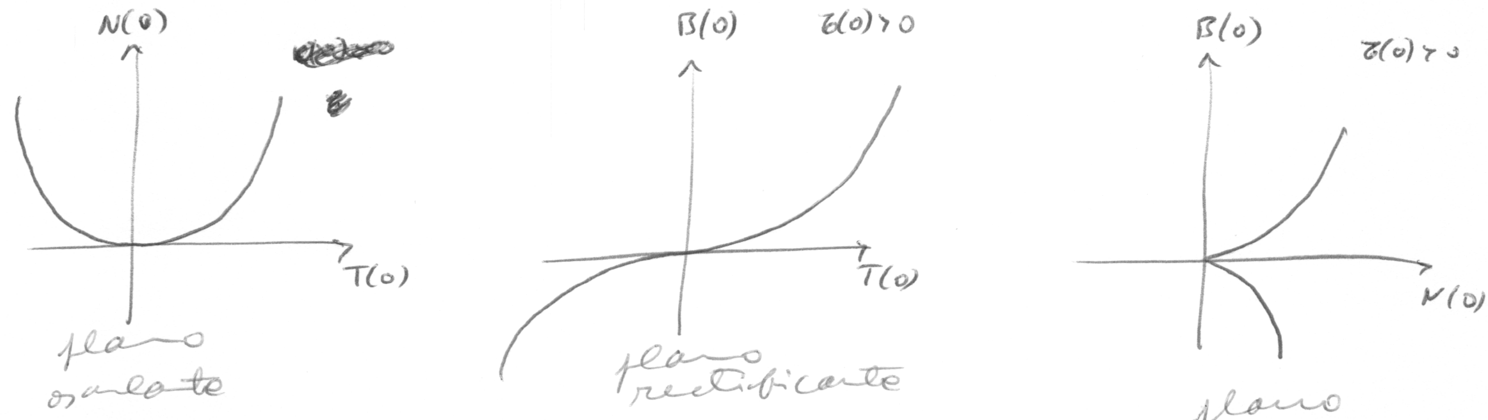
Si g tiene mismo κ, τ que f puedo encontrar $\varphi \in O_n$ tal que $\varphi\circ f$, g tienen mismo κ, τ, $T(0), N(0), B(0)$ $\Rightarrow$ $\varphi\circ f = g$ ✓

Cor de la Dem 2

$$f(t) - f(0) = (t + \cdots)\, T(0) + \left(\frac{\kappa(0)}{2} t^2 + \cdots\right) N(0)$$
$$+ \left(\frac{\kappa(0)\tau(0)}{2} t^3 + \cdots\right) B(0)$$

$\Rightarrow$ la curva es localmente aproximada por

$$(t, \alpha t^2, \beta t^3) \qquad (\alpha > 0)$$



proyección de la curva sobre los planos coordenados de Frenet

= hélice

distinto signo de τ (tornillo con rosca común $\tau > 0$)

Teo (existencia)

Sean dadas funciones (continuas)

$\kappa : I \to \mathbb{R}_{>0}$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo)

Entonces existe $f : I \to \mathbb{R}^3$ tal que

a) $|f'(t)| = 1 \quad \forall t \in I$

b) $\kappa_f = \kappa$, $\tau_f = \tau$

Obs Por Prop. anterior f es única salvo congruencia ortogonal

Cor Fijo intervalo I

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{curvas parametrizadas} \\ \text{3-regulares} \\ f : I \to \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Big/ \equiv \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\kappa, \tau), \\ \kappa : I \to \mathbb{R}_{>0} \\ \tau : I \to \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$f \longmapsto (\kappa_f, \tau_f)$$

es una biyección

(Teorema de clasificación ortogonal)

Dem Teo Miramos nuevamente el sistema de ecuaciones diferenciales de Frenet

$$X' = K \cdot X$$

K es conocida

Teo. $\exists$ ecuaciones diferenciales

$\Rightarrow \exists$ solución $F(t) = X$ definida en I

(elijo $t_0 \in I$ y condición inicial $F(t_0)$)

Pensemos T la primera fila de F

Tomamos $f = \int T$

Falta ver que f sirve.

Afirmamos: si $F(t_0)$ fue elegida ortogonal entonces $F(t)$ es ortogonal $\forall t$.

Pues

$$(F.F^t)' = F'.F^t + F.F'^t$$
$$= K F F^t + F F^t K^t$$

Congruencia (ortogonal, afín) de curvas en $\mathbb{R}^n$: ver Spivak

$\Rightarrow Y = F.F^t$ es solución de

$$Y' = K Y + Y K^t$$

con $Y(0) = F(0) F(0)^t = I$

Pero este sistema también tiene la solución

$$Y(t) = I \quad \forall t$$

(uso $K + K^t = 0$)

Por unicidad, $F.F^t = I$ como se afirmaba. ✓

En particular, $T =$ primera fila de F satisface $|T| = 1 \Rightarrow |f'| \equiv 1$

y si escribo $F = \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$ entonces $\{T, N, B\}$ es ortonormal.

Como $F' = KF$, resulta $T' = \kappa N$ (aquí uso $\kappa > 0$)

$\Rightarrow f'' = \kappa N \Rightarrow \kappa = |f''|$ es la curvatura de f

y N es el vector normal de f.

Como $\det F > 0$ (por continuidad), resulta $B = T \times N$

y como $B' = \tau N$, resulta $\tau = \tau_f$ ✓