Estadística - Segundo Cuatrimestre 2017
Trabajo Práctico 1

Resuelva el siguiente ejercicio utilizando el R y entregue un informe (por computadora) en el cual figuren los gráficos requeridos y las respuestas a las preguntas. Presentar el código en un archivo aparte. Si tienen dudas con los comandos, pueden consultar el help de R (por ejemplo, para ayuda con el histograma, poner `help(hist)`*), usar Google o preguntarle a su docente de confianza (aunque la idea es que se arreglen por su cuenta).*
Puede hacerse individualmente o en grupos de a dos personas.
Fecha límite: 28 de agosto.

La forma quizás más conocida de mezclar un mazo de cartas se conoce como "riffle shuffle" y es el que se muestra en la imagen.

Supongamos que tenemos n cartas con los números del 1 al n ordenados de forma creciente (es decir, un mazo ordenado de fábrica). El objetivo de este TP es ver (empíricamente) cuántas veces hay que mezclar este mazo que inicialmente estaba ordenado para que las cartas queden en un orden "aleatorio". Podemos modelar cada mezclada con los siguientes dos pasos:

- Se divide el mazo en dos sub-mazos, de modo que si el mazo entero tiene n cartas, entonces la cantidad de cartas del primer sub-mazo (llamémosla k) tiene distribución $Bi(n, 1/2)$. El primer sub-mazo se compone de las k cartas que estaban inicialmente arriba (en su mismo orden) y el segundo son las $n - k$ cartas que estaban inicialmente abajo (en su mismo orden).

- Se unen los dos sub-mazos de la siguiente manera: se eligen al azar k números enteros distintos entre 1 y n. En estas k posiciones elegidas su ubican las k cartas del primer sub-mazo (sin alterar su orden) y en las posiciones restantes se ubican las cartas del segundo sub-mazo (también sin alterar su orden).

Antes de seguir, les aconsejo convencerse de que este procedimiento modela bien el riffle shuffle. Para formalizar la noción de un mazo bien mezclado, vamos a necesitar las siguientes definiciones:

Definición 1: Dada una permutación σ de los números 1 a n, decimos que $(t, t+1, t+2, \ldots, q-1, q)$ con $1 \leq t < q \leq n$ forman una **cadena consecutiva creciente** si estos números conservan su orden en la permutación σ. Por ejemplo, en la permutación $\sigma = 124635$, (123) es una cadena consecutiva creciente pero (456) no lo es (porque en σ el 6 está antes del 5).

Definición 2: Llamamos **orden máximo** de una permutación σ a la longitud máxima entre todas las cadenas consecutivas crecientes de σ. Por ejemplo, el orden máximo de 15234 es 4 (por la cadena (1234)), el orden máximo de 54321 es 1 (porque no hay cadenas de longitud 2), el orden máximo de 12345 es 5 (por la cadena (12345)), etc.

1. Programar una función que, dada una permutación, devuelva su orden máximo.
2. Programar una función que realice un riffle shuffle de una permutación dada.
3. Demostrar que si comenzamos con el mazo ordenado y realizamos un riffle shuffle, el orden máximo de la permutación resultante no puede ser menor a 26. Si en vez de un riffle shuffle hacemos dos, ¿qué cota inferior podría dar para el orden máximo de la permutación resultante?
4. Mediante una simulación, aproximar el valor esperado y el desvío estándar del orden máximo de una permutación elegida al azar suponiendo que $n = 52$ (mazo de cartas usual).
5. Aproximar el valor esperado y el desvío estándar del orden máximo si nuestro mazo (inicialmente ordenado) fue mezclado i veces con el riffle shuffle (tomar $i = 1, 2, \ldots,$ hasta que considere suficiente). Representar estos valores en un gráfico y comparar con el item anterior.
6. Teniendo en cuenta estos resultados, cuántas veces mezclaría el mazo de 52 cartas para quedarse tranquilo de que quedó bien mezclado?