

## A) Consistencia y distribución asintótica.

1. (a) Sea  $\delta_n$  un estimador de  $q(\theta)$ . Probar que si  $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow 0$ , entonces  $\delta_n$  es débilmente consistente.
- (b) Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. tal que  $E_\theta(X) = \theta$  y  $V_\theta(X) < \infty$ . Consideremos el siguiente estimador aleatorizado de  $\theta$  :

$$\delta_n = (1 - \varepsilon_n) \bar{X} + \varepsilon_n n$$

donde  $\varepsilon_n \sim \text{Bi}(1, 1/n)$  y es independiente de las  $X_i$ . Probar que  $\delta_n$  es débilmente consistente, aunque  $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow \infty$ .

2. Sea  $\Theta$  un espacio paramétrico finito y  $\delta_n$  el EMV de  $\theta$ . Probar que  $\delta_n$  es débilmente consistente si y sólo si  $P_\theta(\delta_n = \theta) \rightarrow 1 \forall \theta \in \Theta$ .
3. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $\mathcal{E}(\theta)$ . Probar que el EMV de  $\theta$  es fuertemente consistente y asintóticamente eficiente.
4. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Consideremos  $\delta_n = \bar{X}$  y

$$\delta_n^* = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

- (a) Analizar si estos estimadores de  $\lambda$  son fuertemente consistentes.
  - (b) Hallar sus distribuciones asintóticas. Decir si alguno de los dos es asintóticamente eficiente. (NOTA:  $E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$ )
5. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $U(0, \theta)$ .
    - (a) Probar que el EMV de  $\theta$  es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
    - (b) Probar que el estimador de momentos para  $\theta$  es fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
    - (c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?
  6. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

- (a) Probar que el EMV de  $\theta$  es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.
  - (b) Probar que el estimador de momentos para  $\theta$  es consistente y hallar su distribución asintótica.
  - (c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?
7. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. de una distribución  $F_0(x - \theta)$  con  $F_0$  una función de distribución fija y  $\theta \in \mathbb{R}$ . Sea  $\delta_n$  un estimador de  $\theta$  equivariante por traslaciones (i.e.: para cualquier constante  $c \in \mathbb{R}$  se verifica que  $\delta_n(x_1 + c, \dots, x_n + c) = \delta_n(x_1, \dots, x_n) + c$ ).

- (a) Mostrar que  $\delta_n - \theta$  tiene una distribución que no depende de  $\theta$ .
- (b) Deducir que la varianza asintótica de  $\delta_n$  (si existe) no depende de  $\theta$ .
8. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución  $F$  con densidad  $f(x - \mu)$  donde  $f(x)$  satisface: i)  $f(x) = f(-x)$ , ii)  $f(x)$  continua en  $x = 0$ .
- (a) Sea  $Z_{a,i} = I\{X_i \leq a\}$ . Mostrar que  $Z_{a,i}$  tiene distribución  $\text{Bi}(1, F(a))$ .
- (b) Sea  $Z_a = \sum Z_{a,i}$ . Mostrar que  $Z_a$  tiene distribución  $\text{Bi}(n, F(a))$ .
- (c) Probar que
- $$P(Z_a \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1) \leq P(\text{mediana}(X_1, \dots, X_n) \leq a) \leq P(Z_a \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)$$
- (d) Mostrar que  $\text{mediana}(X_1, \dots, X_n)$  es un estimador débilmente consistente de  $\mu$ .
9. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.  $N(\theta, 1)$ . Definamos el estimador

$$\delta_n = \begin{cases} \bar{X} & \text{si } |\bar{X}| \geq 1/n^{1/4} \\ \frac{1}{2}\bar{X} & \text{si } |\bar{X}| < 1/n^{1/4} \end{cases}$$

Probar que  $\sqrt{n}(\delta_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, v(\theta))$  con  $v(\theta) = 1/I(\theta) \forall \theta \neq 0$  y  $v(0) < 1/I(0)$ .

B) Ejercicio para hacer en la computadora.

1. Retomemos el ejercicio 1 de la práctica 2 parte D). Para cada uno de los 4 conjuntos de 1000 datos realizar un histograma. ¿Puede decir algo sobre las distribuciones asintóticas de los estimadores? ¿A que familias pertenecen? ¿Cuáles son sus parámetros?.