A) Error cuadrático medio. Estimadores insesgados.

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con parámetro θ. Sea $\hat{\theta}_n = \delta(\mathbf{X})$ un estimador de θ con varianza finita. Si $b(\hat{\theta}_n)$ es el sesgo de $\hat{\theta}_n$, probar que $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}_n) = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución tal que existe $E(X_1) = \mu$. Consideremos la clase de estimadores
$$\mathcal{D} = \left\{ \delta(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i : \alpha_i \in I\!R,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$
   (a) Probar que todo $\delta \in \mathcal{D}$ es un estimador insesgado de μ.
   (b) Supongamos que existe $V(X) = \sigma^2$. Mostrar que $\bar{X} = \arg\min_{\delta \in \mathcal{D}} V(\delta)$.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución tal que existe $V(X) = \sigma^2$.
   (a) Demostrar que
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$$
   es un estimador insesgado de σ^2.
   (b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, calcular el $\mathrm{ECM}(s^2)$ y el $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ donde $\tilde{\sigma}^2 = (n-1) s^2 / (n+1)$.
   (c) Probar que, aunque $\mathrm{ECM}(s^2) > \mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$, la razón entre los ECM tiende a 1 cuando $n \to \infty$.
   (d) Mostrar que la contribución del sesgo de $\tilde{\sigma}^2$ a $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ es despreciable cuando $n \to \infty$ (en el sentido de que la razón entre $b(\tilde{\sigma}^2)^2$ y $\mathrm{ECM}(\tilde{\sigma}^2)$ tiende a 0).

4. Dada una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$, sea $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ y $\tilde{\theta}_n$ el estimador de θ basado en el primer momento.
   (a) Probar que $\tilde{\theta}_n$ es insesgado y que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado.
   (b) Calcular el ECM de ambos estimadores. ¿Qué estimador preferiría desde este punto de vista?

B) Estadísticos suficientes.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Demostrar que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente para λ:
   (a) Aplicando la definición.
   (b) Aplicando el Teorema de Factorización.

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución continua $F(x, \theta)$. Demostrar que $T(\mathbf{X}) = \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \right)$ es suficiente para θ.

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. Probar que:

(a) Si $X_i \sim Bi\,(n_i, p)\,,\ 1 \leq i \leq n$, con n_i conocidos, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p.

(b) Si $X_i \sim \Gamma\,(\alpha, \lambda)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$ es suficiente para $(\alpha, \lambda)\,.$
Si α es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para λ.
Si λ es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para α.

(c) Si $X_i \sim \beta\,(r, s)$ entonces $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i))$ es suficiente para $(r, s)\,.$
Si r es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n (1 - X_i)$ es suficiente para s.
Si s es conocido, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es suficiente para r.

(d) Si X_i tiene función de probabilidad puntual

$$f\,(x; \theta, p) = (1 - p)\,p^{x-\theta} \text{ para } x = \theta, \theta + 1, \theta + 2, \ldots$$

con $(\theta, p) \in I\!R\times\ (0, 1)\,,$ entonces $\left(X_{(1)}, \sum_{i=1}^n X_i\right)$ es suficiente para $(\theta, p)\,.$
Si p es conocido, entonces $X_{(1)}$ es suficiente para θ.
Si θ es conocido, entonces $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para p.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. $\mathcal{U}\,(\theta_1, \theta_2)$. Mostrar que $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ es suficiente para θ.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución con densidad

$$f\,(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right\} I_{[\mu,\infty)}\,(x)$$

con $\mu \in I\!R$ y $\sigma > 0$.

(a) Exhibir un estadístico suficiente bidimensional para (μ, σ).

(b) Hallar un estadístico suficiente para μ cuando σ es fijo y conocido.

(c) Hallar un estadístico suficiente para σ cuando μ es fijo y conocido.

10. Consideremos una familia $\{p\,(\mathbf{x}, \theta) : \theta \in \Theta\}$ tal que el soporte $S = \{\mathbf{x} : p\,(\mathbf{x}, \theta) > 0\}$ es independiente de θ y $\theta = (\theta_1, \theta_2)\,,$ con $\theta_1 \in \Theta_1$ y $\theta_2 \in \Theta_2$ variando independientemente. Supongamos que $T_1(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_1 cuando θ_2 es fijo y conocido y que $T_2\,(\mathbf{X})$ es suficiente para θ_2 cuando θ_1 es fijo y conocido.

(a) Demostrar que $T\,(\mathbf{X}) = (T_1\,(\mathbf{X})\,, T_2\,(\mathbf{X}))$ es suficiente para θ.

(b) Mostrar que la recíproca de (a) no es cierta en general. Considerar la familia $N\,(\mu, \sigma^2)\,.$

11. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución P_θ. Supóngase que $T(\mathbf{X})$ es un estadístico suficiente para θ. Demostrar que el EMV de θ depende de $\mathbf{X}$ sólo a través de $T(\mathbf{X})$.

C) Estimadores basados en estadísticos suficientes.

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, \theta)$. Luego, $\delta\,(\mathbf{X}) = X_1$ es un estimador insesgado de θ y $T\,(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente.

(a) Usando el Teorema de Rao–Blackwell, hallar un estimador insesgado $\delta^*\,(T)$ que sea mejor que δ.

(b) Probar que $V_\theta\,(\delta^*) < V_\theta\,(\delta) \quad \forall\, \theta$ si $n > 1$.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ el estadístico suficiente.

    (a) Sea $\mu = e^{-\lambda}$. Mostrar que $\hat{\mu} = I\{X_1 = 0\}$ es un estimador insesgado de μ.

    (b) Aplicar el Teorema de Rao–Blackwell para obtener un estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que $\hat{\mu}$ y comparar los ECM de ambos estimadores.

14. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi(1, \theta)$. Dados m y k tales que $k \leq m < n$, se quiere estimar $q(\theta) = \binom{m}{k}\theta^k(1-\theta)^{m-k}$. Sea $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ y $h(S) = I\{S = k\}$.

    (a) Probar que $h(S)$ es un estimador insesgado de $q(\theta)$.

    (b) Construir un estimador insesgado de $q(\theta)$ mejor que $h(S)$.

15. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N(\mu, 1)$ y $\xi \in I\!R$ un número fijo y conocido. Se desea estimar $p = P(X_1 \leq \xi)$.

    (a) Mostrar que $I\{X_1 \leq \xi\}$ es un estimador insesgado de p.

    (b) A partir de $T = \bar{X}$, construir otro estimador insesgado $\delta^*(T)$ mejor que el anterior.
    Sugerencia: probar y usar que $\bar{X}$ y $X_1 - \bar{X}$ son independientes.

D) Ejercicio para hacer usando la computadora.

16. El objetivo de este ejercicio es etimar θ, de una población $U(0, \theta)$, para esto tenemos los siguientes 4 estimadores de θ:

    Método de momentos: $\widehat{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$

    Método de máxima verosimilitud: $\widehat{\theta}_2 = \max\{X_1, ..., X_n\}$

    Un estimador robusto: $\widehat{\theta}_3 = 2\,\text{mediana}\{X_1, ..., X_n\}$

    MV corregido: $\widehat{\theta}_4 = (6/5)\widehat{\theta}_2$

    La propuesta es sin usar herramientas teóricas inferir cual podría dar una mejor estimación. Para esto generemos 1.000 muestras $X_1, ..., X_n$ de tamaño $n = 5$ de una población $U(0, 1)$ (es decir, buscamos estimar $\theta = 1$.)

    (a) Para cada una de las 1.000 muestras calcular los cuatro estimadores alternativos de θ.

    (b) Para cada uno de los 4 conjuntos de 1000 datos (los estimadores calculados), graficar en un mismo gráfico los boxplots. Qué observa? Qué estimador tiene mayor varianza? hay algún estimador que pareciera sesgado? Qué estimador prefiere?

    (c) Según el gráfico anterior cuanto vale aproximadamente $P_\theta(\widehat{\theta}_1 \leq \theta)$