Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Segundo cuatrimestre de 2017 (6/10/2017)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Roberta y Melanie viven sobre la misma calle, a 700 metros de distancia. Un día, deciden encontrarse en un bar que queda entre ambas casas, a 200 metros de la casa de Roberta.

   Para eso, salen a la misma hora. Roberta va al bar caminando, a 1,5 metros por segundo. Melanie va en bicicleta, y para calcular a qué velocidad tiene que pedalear corre un programa en su computadora, que trabaja con base 10, mantisa de 2 dígitos y método de redondeo.

   El programa realiza los siguientes cálculos, expresando el tiempo en segundos y la distancia en metros:

   - Primero calcula cuánto tiempo va a tardar Roberta en llegar al bar, a partir de la distancia que debe recorrer y la velocidad a la que camina.
   - Luego, calcula a qué velocidad tiene que pedalear para recorrer los 500 metros que la separan del bar en el mismo tiempo que tarda Roberta en llegar.

   Si Melanie pedalea a la velocidad a la que le indica el programa ¿quién llega al bar primero? ¿cuánto tiempo tiene que esperar hasta que llegue la otra persona?

2. Considerar el problema:

$$\begin{cases} y'(t) &= \operatorname{sen}(y(t)) + t^2, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

   a) Escribir la iteración del método de Euler con paso h correspondiente a este problema y estimar el error de truncado local para $t \in [0,1]$.

   b) Hallar un valor del paso h para que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-3}.

3. Se tiene el siguiente problema de evolución:

$$\begin{array}{lr} u_t(x,t) = u_x(x,t), & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{array}$$

   a) Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar diferencias forward para la derivada temporal, y diferencias centradas para la derivada espacial.

   b) Estimar el error de truncado y formular el problema de forma matricial.

4. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la matriz tridiagonal A_n dada por:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1/n & 1 & & 0 \\ 1/n & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1/n & 1/n \end{pmatrix},$$

es decir, tal que $a_{(i-1)i} = a_{ii} = 1/n$ y $a_{i(i+1)} = 1$.

a) Probar que $\text{cond}_\infty(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) ¿Qué se puede decir de $\text{cond}_1(A_n)$ cuando $n \to +\infty$?

5. Sean, para $k \in \mathbb{R}$, las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ N_1 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se quiere resolver la ecuación lineal $Ax = b$. Para eso, para cada $i \in \{1, 2\}$, se descompone la matriz $A = M_i + N_i$ y se proponen los métodos

$$x_{n+1} = -M_i^{-1} N_i x_n + M_i^{-1} b.$$

a) Hallar todos los valores de k para los que cada uno de los métodos converge para todo valor inicial. Para esos valores, ¿cuál resulta más conveniente?

b) ¿Para qué valores de k se puede asegurar que existe una norma $\| \cdot \|$ tal que el error del método 1 satisface que

$$\|e_n\| \leq (1/2)^n \|e_0\|$$

para todo valor inicial?