Ecuaciones Diferenciales – 2do cuatrimestre 2017

Ecuación de ondas

Ejercicio 1. Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ en

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 2. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \le \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 4. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\partial_t^2 \phi(x,t) - \partial_x^2 \phi(x,t))\, dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas

   $$u_1(x,t) = H(x-t), \quad u_2(x,t) = H(x+t)$$

   donde H es la función de Heaviside

   $$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

   son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 5. Hallar la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) &= f(t) & t > 0 \\ u(x,0) &= g(x) & x > 0 \\ u_t(x,0) &= h(x) & x > 0. \end{cases}$$

con $f, g, h \in C^2$ que satisfacen

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Verifiar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas aún sobre la característica $x = t$.

Ejercicio 6. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t) = w(|x|, t),\ x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$