Ecuaciones Diferenciales - 2do. cuatrimestre 2017

TRANSFORMADA DE FOURIER

Notación: Notaremos por $\mathcal{F}[f]$ a la transformada de fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\mathcal{F}[f](y) = \int f(x)e^{-2\pi i x y}dx.$$

1. Sea $f \in L^1$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y - \alpha)$.
   (b) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
   (c) Si $g(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \lambda^n\mathcal{F}[f](\lambda y)$.
   (d) Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\mathcal{F}[f]$ es derivable respecto a x_k y $\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$.
2. Mostrar que si $f \in L^1$ entonces $\mathcal{F}[f] \in L^\infty$ y
$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$
3. Probar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = f(-x)$.
4. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.
5. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:
   $\chi_{[-1,1]}$, $\exp(-a|x|)$, $1/(1 + x^2)$, $\exp(-\pi x^2)$.
6. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
7. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = 0$ entonces $f = 0$.
8. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e.
9. Utilizar la transformade de Fourier para obtener una solucón explícita de la siguiente ecuación:
$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$
10. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:
$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$
donde $f \in L^2$.
11. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger
$$\begin{cases} iu_t + \Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$
donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2$.
12. Obtener la expresión integral de la solución de la ecuación de ondas unidimensional
$$\begin{cases} u_{tt} &= u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, +\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
donde f y $g \in \mathcal{S}$.