Ecuaciones Diferenciales - 2do. cuatrimestre 2017

Práctica 5 - Series de Fourier - Separación de variables

Ejercicio 1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ medible e integrable en $[-p,p]$, tal que $f(x+2p) = f(x)$. Probar los siguientes resultados:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$\int_{a-p}^{a+p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\,dt.$$

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$\int_{2p}^{2p+x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$

(c) Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Entonces, $g(x+2p) = g(x)$ si y solo si
$$\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0.$$

Ejercicio 2. Calcular la serie de Fourier de
$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0,\pi) \\ -\pi - x & \text{si } x \in (-\pi,0) \end{cases}$$
y hallar $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

En los ejercicios 3-6 imponer condiciones suficientes sobre f, g, f_i (según corresponda) para que las series obtenidas sean soluciones del problema considerado.

Ejercicio 3. Resolver separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,a) \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(x,a) = 0 & x \in (0,\pi) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & y \in (0,a). \end{cases}$$

Ejercicio 4. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos ($c > 0$)
$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,l) \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in (0,l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, se busca $u = u(x,y)$ tal que
$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) &= f_1(x), & x \in (0,1) \\ u(1,y) &= f_2(y), & y \in (0,1) \\ u(x,1) &= f_3(x), & x \in (0,1) \\ u(0,y) &= f_4(y), & y \in (0,1). \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver
$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} + cu = 0 & (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Sugerencia: considerar $v(x,t) = u(x,t)\, e^{ct}$.

Ejercicio 7. Para cada natural n, se define la función
$$f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} sen(nx).$$

(a) Resolver el problema
$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1) \\ u_n(x,0) = f_n(x) & x \in (0,\pi) \\ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) \\ u_n(0,y) = u_n(\pi,y) = 0 & y \in (0,1). \end{cases}$$

(b) Mostrar que f_n y todas sus derivadas convergen a 0 en $[0,\pi]$ cuando n tiende a $+\infty$, pero que para todo $y > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(.,y)\|_\infty = +\infty$$