

## Ecuaciones Diferenciales - 2do cuatrimestre 2017

### PRÁCTICA 3 - PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

**Ejercicio 1.** Construir la función de Green asociada al problema

$$\begin{cases} -u'' = f(t), & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Resolver el siguiente problema usando la función de Green

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = t, & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $u$  una solución no trivial de  $u'' + qu = 0$ .

- (a) Si  $q > 0$  en  $(0, +\infty)$  y  $\int_1^{+\infty} q(t)dt = \infty$ , probar que  $u$  tiene infinitos ceros positivos. (Sugerencia: suponer que existe un último cero en  $t_f$ , e integrar por partes la ecuación  $-\frac{u''}{u} = q$ ).
- (b) ¿Vale el resultado sin la hipótesis  $\int_1^{+\infty} q(t)dt = \infty$ ? Considerar el caso  $q(t) = \frac{\lambda}{t^2}$ .
- (c) Si  $q \leq 0$ , probar que  $u'u$  es creciente, y que  $u$  tiene a lo sumo un cero.

**Ejercicio 4.** Sean  $u, v$  tales que

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= 0 \\ -(pv')' + \bar{q}v &= 0 \end{aligned}$$

en donde  $q \geq \bar{q}$ . Si  $a$  y  $b$  son dos ceros consecutivos de  $u$ , probar que  $v$  se anula en  $(a, b)$  o  $v$  es un múltiplo de  $u$  (y  $\bar{q} = q$ ).

**Ejercicio 5.** Dado el problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda \rho u, & a < t < b \\ u(a) = 0, & u(b) = 0 \end{cases}$$

donde  $p \in C^1[a, b]$ ,  $q, \rho \in C[a, b]$ ,  $p, \rho > 0$ ,  $q \geq 0$ . Probar

- (a) El autoespacio asociado a un autovalor  $\lambda$  tiene dimensión 1.
- (b) Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales en  $L^2_\rho[a, b]$ .
- (c) Todos los autovalores son positivos.

**Ejercicio 6.** Consideremos el problema del ejercicio anterior. Probar

- (a) La autofunción  $u_0$  asociada al menor autovalor  $\lambda_0$  no se anula en  $(a, b)$  (en particular  $u_0$  no cambia de signo).
- (b) La  $n$ -ésima autofunción  $u_n$  tiene por lo menos  $n$  ceros en  $(a, b]$ .
- (c) Si  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  son dos ceros consecutivos de una autofunción  $u_n$  del problema, entonces  $u_n$  es la autofunción asociada al menor autovalor del problema equivalente en el intervalo  $[\bar{a}, \bar{b}]$ .

(d) Si  $[\bar{a}, \bar{b}] \subseteq [a, b]$ ,  $\bar{p} \geq p$ ,  $\bar{q} \geq q$ ,  $\bar{\rho} \leq \rho$ , el menor autovalor  $\bar{\lambda}_0$  de

$$\begin{cases} -(\bar{p}u')' + \bar{q}u = \bar{\lambda}\bar{\rho}u & \bar{a} < t < \bar{b} \\ u(\bar{a}) = 0, u(\bar{b}) = 0 \end{cases}$$

verifica  $\bar{\lambda}_0 \geq \lambda_0$ .

(e) Probar que  $\bar{\lambda}_n \geq \lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Ejercicio 7.** Hallar cotas para el  $n$ -ésimo autovalor de

$$\begin{cases} -((1+t^2)u')' + tu = \lambda u, & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 8.** Dada la ecuación  $-u'' + tu = 0$ . Probar

(a) Sus soluciones poseen infinitos ceros en el semieje negativo y a lo sumo uno en el positivo.

(b) Si  $u$  es solución,  $v(t) = u(kt)$  es solución de  $-v'' + k^2tv = 0$

(c) El problema

$$\begin{cases} -u'' + tu = \lambda u, & 0 < t < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

no tiene autovalores negativos.

**Ejercicio 9.** Sean  $p(t) = 5 - 3t^2$  y  $q(t) = -6$

(a) Obtener acotaciones para  $\lambda_k/k^2$ , donde  $\lambda_k$  representa el  $k$ -ésimo autovalor del problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda u \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

(b) Probar que si  $u$  es autofunción, entonces  $u \in C^\infty(0, 1)$ .

(c) Verificar que  $u(t) = t(1-t^2)$  es autofunción.

(d) Probar que para toda  $u \in C^2[0, 1]$  que verifica  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  vale

$$\int_0^1 p(u')^2 dt \geq 36 \int_0^1 u^2 dt$$