Ecuaciones Diferenciales A y B
2do Cuatrimestre 2017
Práctica 1 - Ecuaciones ordinarias

Ejercicio 1 (Lema de Gronwall)**.** Sean u, v funciones continuas no negativas en $[a, b]$ y $\alpha \geq 0$. Si

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\,ds, \quad t \in [a, b],$$

probar que

$$u\left(t\right) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t v\left(s\right) ds\right).$$

En particular, si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

Ejercicio 2. Probar los siguientes resultados.

(a) Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $u \in C([t_0, t_1]) \cap C^1((t_0, t_1))$. Entonces, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f\left(t, u\right), & t_0 < t < t_1 \\ u\left(t_0\right) = u_0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación integral

$$u\left(t\right) = u_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, u\left(s\right)\right) ds.$$

(b) Si f es Lipschitz en la segunda variable y $t_1 - t_0$ es suficientemente pequeño, mostrar que la ecuación integral de (a) tiene un único punto fijo.

(c) Si f es Lipschitz en la segunda variable, probar que la solución de valores iniciales del item (a) depende continuamente del dato inicial.

Ejercicio 3. Probar que el problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 + u^2 \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 4. Estudiar la unicidad del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{1/3} \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua en Ω y $f(t, \cdot)$ Lipschitz para cada t, donde Ω es abierto. Se considera para $(t_0, u_0) \in \Omega$ el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f\left(t, u\right) \\ u\left(t_0\right) = u_0 \end{cases}$$

(a) Probar que existe un intervalo abierto maximal $I\left(t_0, u_0\right) \subset \mathbb{R}$, con $t_0 \in I\left(t_0, u_0\right)$, donde la solución está definida.

(b) Para $t \in I(t_0, u_0)$, se define $\phi(t, t_0, u_0) = u(t)$ como el flujo asociado al problema de valores iniciales. Probar que si $t_1, t_2 \in I(t_{0,} u_0)$, entonces $t_2 \in I(t_{1,}\phi(t_1, t_0, u_0))$ y vale

$$\phi(t_2, t_0, u_0) = \phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, u_0))$$

(c) Probar que si el sistema es autónomo (f no depende de t),

$$\phi(t, t_0, \cdot) = \phi(t - t_0, 0, \cdot).$$

(d) Probar que si $(t_0, u_0) \in \Omega$ verifica que $\phi(\cdot, t_0, u_0)$ no está definido para todo tiempo, entonces la trayectoria se escapa de cualquier compacto $K \subset \Omega$.

Ejercicio 6. Probar que dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva y localmente Lipschitz, la solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

existen globalmente (para $t > t_0$) si y sólo si

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\, dx = +\infty.$$

Ejercicio 7. Probar que la ecuación de orden n

$$\begin{cases} u^{(n)} = f\left(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) \\ \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1, \ldots\ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

es equivalente al sistema de primer orden.

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \\ \frac{dv_2}{dt} = v_3 \\ \quad\vdots \\ \frac{dv_n}{dt} = f(t, v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ \\ v_1(t_0) = u_0, \ldots\ldots, v_n(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

Ejercicio 8. Sea $f(t, u)$ definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$ continua en (t, u) y Lipschitz en u con constante K,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ \\ u(t_0) = u_j\ , j = 0, 1 \end{cases}$$

Probar que para $t \in I(t_0, u_0) \cap I(t_0, u_1)$ se cumple

$$|\phi_{t,t_0}(u_1) - \phi_{t,t_0}(u_0)| \le \exp(K|t - t_0|)\, |u_1 - u_0|$$

Ejercicio 9. Sea f definida en $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que f y $\frac{\partial f}{\partial u}$ son continuas en Ω. Probar que el flujo $\phi_{t,t_0}(u_0)$asociado al problema $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ es C^1 en (t, u_0)

Ejercicio 10. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones

(a) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t} + \left(\frac{u}{t}\right)^2$

(b) $\frac{du}{dt} = \sqrt{t + u} - 1$

(c) $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t} + u^{1/2}$

Ejercicio 11. Encontrar la solución general (real) de las siguientes sistemas de ecuaciones

(a) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 + 2u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 + u_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 + u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = 2u_2 \end{cases}$

Ejercicio 12. Encontrar la solución general (real) de las siguientes ecuaciones:

(a) $x'' - 4x = e^{2t}$,

(b) $x'' + 4x = e^{-2t}$,

(c) $x'' - 2x' + x = t^3$.