

PRÁCTICA 4: BANACH LATTICES

Mi sono comportato da ostinato, inseguendo una parvenza di ordine, quando dovevo sapere bene che non vi è ordine, nell'universo. [...] L'ordine che la nostra mente immagina è come una rete, o una scala, che si costruisce per raggiungere qualcosa.

Umberto Eco

Comentario. Notaremos E a un espacio de Riesz y E_+ a sus elementos positivos. Supondremos que los espacios de sucesiones considerados son Banach, normales y tales que los vectores canónicos tienen norma 1.

Ejercicio 1. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ una *b.o.n.* Considerar el orden dado por: $x \leq y$ si $\langle x, e_i \rangle \leq \langle y, e_i \rangle$. ¿Coincide este orden con el orden puntual en $L_2[0, 1]$?

Ejercicio 2. Para elementos arbitrarios x, y, z en un espacio de Riesz probar:

- (a) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$;
- (b) $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$;
- (c) $x + y = x \vee y + x \wedge y$;
- (d) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$;
- (e) $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$;
- (f) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ para todo $\alpha \geq 0$;
- (g) $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$ para todo $\alpha \geq 0$;
- (h) $x = (x - y)^+ + x \wedge y$.

Ejercicio 3. Sean $y \in E_+$ y $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq E_+$ tales que $y \leq \sum_{i=1}^n x_i$. Probar que existen vectores $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq E_+$ tales que $y = \sum_{i=1}^n y_i$ y además $y_i \leq x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 4. Sean $x \in E_+$ y $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq E_+$. Probar que $x \wedge (\sum_{i=1}^n x_i) \leq \sum_{i=1}^n x \wedge x_i$.

Ejercicio 5. Mostrar que, si $x, y \in E$ son disjuntos entonces:

- (a) αx y βy son disjuntos para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (b) $|x + y| = |x| + |y|$;
- (c) si $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq E$ son disjuntos dos a dos entonces son *l.i.*

Ejercicio 6. Sea X un Banach lattice y $e \in X$. Probar que $B_e = \{x \in X : |x| \wedge ne \rightarrow |x|\}$ es un sublattice de X .

Ejercicio 7. Sean X un Banach lattice orden continuo y $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq X_+$ una familia maximal y acotada de elementos disjuntos. Llamemos $P_i : X \rightarrow B_{e_i}$ al operador definido sobre los elementos positivos por $P_i(y) := \sup\{y \wedge ne_i : n \in \mathbb{N}\}$ para todo $y \in X_+$. Mostrar que $|x| = \sup\{P_i|x| : i \in I\}$.

Ejercicio 8. Sean X e Y espacios de sucesiones simétricos.

- (a) Probar que $M(X, Y)$ es un espacio de sucesiones simétrico.
- (b) Hallar $X^\times$ para $X = c_0$.
- (c) Hallar $M(\ell_p, \ell_q)$.

Ejercicio 9. Dado X un espacio de sucesiones definimos la *función fundamental* de X por $\lambda_X(n) := \|e_1 + \dots + e_n\|_X$. Probar que si X es simétrico, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lambda_X(n)\lambda_{X^\times}(n) = n$. Sugerencia: considerar $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in X$, rotar coordenadas y promediar.

Ejercicio 10. Mostrar que la función fundamental de un espacio de sucesiones no caracteriza al espacio. Sugerencia: considerar ℓ_p y $d(w, q)$ adecuados.

Ejercicio 11. Probar que todo K espacio métrico compacto no es básicamente desconexo.

Ejercicio 12. Probar (a mano) que c no es σ -completo. Comparar con el ítem anterior.

Ejercicio 13. Sea K un espacio topológico compacto. Mostrar que $C(K)$ es orden completo si y sólo si K es extremadamente desconexo. (Revisar lo visto en clase para σ -completo).

Ejercicio 14. Concluir que la compactificación $\beta\mathbb{N}$ es un compacto extremadamente desconexo.