PRÁCTICA 8

1. Hallar los extremos de $f|_A$ en los casos siguientes

   a) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \ , \ y > 0\}$

   b) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0\}$

   c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 3 \ , \ |y| \leqslant 3\}$

2. Una empresa produce ventanas del mismo tipo en dos plantas distintas. La función conjunta del costo de fabricación es $f(x,y) = x^2+xy+2y^2+700$, donde x indica la cantidad de unidades producida en la primer planta e y las unidades producidas en la segunda planta. ¿Cuántas unidades se deben producir en cada planta a fin de minimizar los costos?

3. Hallar el punto de la parábola $y = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima. Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

4. Hallar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.

5. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

6. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

   b) $f(x,y) = x - y$ $\quad x^2 - y^2 = 2$

   c) $f(x,y) = x^2 y$ $\quad x^2 + 2y^2 = 6$

7. Hallar los extremos locales de $f|_S$ en los siguientes casos

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad S = \{(x,2) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad S = \{(x,y) \ / \ y \geqslant 2\}$

8. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las siguientes funciones en el punto indicado. Escribir la expresión del resto.

   a) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$

   b) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$

   c) $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$

   d) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$ en $(3,4)$

9. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$\varphi(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

10. Hallar un polinomio $Q(x, y)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1 + x + y} - Q(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

11. Sea $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 tal que

$$g(t) = 2 - 2t + 4t^2 + R_2(t)$$

con $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{R_2(t)}{t^2} = 0.$

Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x, y) = g(2x + 3y)$ en $(0, 0)$.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema *(Multiplicadores de Lagrange: una condición)*

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, U abierto, $S = \{\mathbf{x} \in U \ / \ g(\mathbf{x}) = 0\}$ y $\mathbf{a} \in S \cap U$. Entonces, si

- ▹ $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ y
- ▹ $f|_S : S \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $\mathbf{a}$

existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$$

Proposición

Si al restringir f a una superficie S tiene un un extremo en $\mathbf{a}$, entonces $\nabla f(\mathbf{a})$ es perpendicular a S en $\mathbf{a}$.

Teorema *(Multiplicadores de Lagrange: m condiciones)*

Sean $f, g_1, \ldots, g_m : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, U abierto, $m \leqslant n$,

$$S = \{\mathbf{x} \in U \ / \ g_i(\mathbf{x}) = 0 \ , \ i = 1, \ldots, m\}$$

y $\mathbf{a} \in S \cap U$. Entonces, si

- ▹ la matriz $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)$ tiene rango m y
- ▹ $f|_S : S \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $\mathbf{a}$

existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a})$$

Notación

Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se llaman ***multiplicadores de Lagrange*** y la función $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

se denomina ***función de Lagrange***.