PRÁCTICA 6

1. Verificar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ y que no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Qué hipótesis del teorema de Rolle no se cumple?

2. Para la función $f(x) = 3x^2 - 5$, encontrar $c \in (-2, 0)$ tal que $f(0) - f(-2) = 2f'(c)$.

3. Comprobar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene una única raíz real.

4. Probar las desigualdades siguientes:

   a) $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$

   b) $\log(x + 1) < x$ para todo $x > 0$

   c) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

   d) $\operatorname{arctg} x < x$ para todo $x \neq 0$

5. Sea f derivable en $[a, +\infty)$ tal que $f(a) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, +\infty)$.

   a) Mostrar que $|f(x)| < x - a$ para todo $x > a$.

   b) Deducir que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$.

   c) Concluir que $e^x > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hospital?
$$\lim_{x\to 1} \tfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \tfrac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \tfrac{6x}{2} = 3$$
   El límite es: -4.

7. Probar que $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = 0$ sin usar L'Hospital.
   ¿Qué sucede si se aplica L'Hospital? ¿Qué se deduce?

8. Calcular los límites siguientes:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (x - \operatorname{sen} x)\ln x$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \, \ln(x+1)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + e^x}{x^2+3x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 \, e^{-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

9. Hallar las fórmulas de Mac Laurin de las siguientes funciones indicando el término complementario:

a) $\frac{1}{x-1}$

b) e^x

c) $x \operatorname{sen}(x^3)$

d) $\ln(x+1)$

e) $(1+x)^n$

10. Desarrollar el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en potencias de $x - 2$.

11. a) Sea f una función $n+1$ veces derivable en $a = 0$ y sea P su n-ésimo polinomio de Taylor en $a = 0$. Probar que $xP(x)$ es el $(n+1)$-ésimo polinomio de Taylor de $g(x) = xf(x)$ en $a = 0$.

b) Encontrar el n-ésimo polinomio de Taylor de $\dfrac{x^2}{1+x}$ en $a = 0$. ¿Cuál es su resto?

12. a) Calcular $\ln(0.95)$ usando el polinomio de Mac Laurin de grado 3; estimar el error.

b) Calcular $e^{1.1}$ usando el polinomio de Mac Laurin de grado 4; estimar el error.

13. Si $P(x) = 2 + 3x - 4x^2$ es el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de f, hallar el polinomio de orden 2 de:

a) $g(x) = (e^x + x)f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$

14. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

    a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \qquad [0, 3]$
    b) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} \qquad [1/2, 2]$
    c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} \qquad [0, 3]$

15. En cada una de las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores máximo y mínimo locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

    a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$
    b) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$
    c) $f(t) = \operatorname{sen}^2 t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
    d) $f(x) = \operatorname{sh} x$
    e) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

16. De una pieza de cartón rectangular de lados $a = 25$ cm y $b = 10$ cm se cortan en las esquinas cuadrados de lados x para hacer una caja. ¿Cúal es el valor de x que hace máxima la capacidad de la caja?

17. a) Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y su producto el mayor posible.
    b) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y su suma la mínima posible.

18. Sea g una función con derivada segunda y tal que que $g(0) = 0$. Si f es la función:

$$f(x) = g(5x^2) + xg(x)$$

Calcular $f'(x)$ y probar que f tiene un extremo local en $x = 0$. Si además g es creciente y su derivada no se anula nunca, clasificar el extremo.

Apéndice: Definiciones y Resultados

Extremos relativos

Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f ***tiene en*** x_0 ***un máximo relativo*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$.

Análogamente, se dice que f ***tiene en*** x_0 ***un mínimo relativo*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$.

Cuando $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$, decimos que f ***alcanza un valor máximo en*** x_0. Si en cambio se tiene que $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$, decimos que f ***alcanza un valor mínimo en*** x_0.

Teorema de Fermat

Si la función f, derivable en (a, b), alcanza un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto interior c, entonces $f'(c) = 0$.

Punto crítico

Sea f una función derivable en (a, b). Un punto $x_0 \in (a, b)$ se dice que es un ***punto crítico*** de f si $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en su interior, y verifica $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto intermedio c tal que $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$.

Teorema de Lagrange

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior. Entonces, existe un punto intermedio c tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \qquad (a < c < b)$$

Teorema de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en su interior. Supongamos además que la derivada g' no se anula en ningún punto del intervalo. Entonces existe un punto intermedio c tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

Regla de l'Hospital

Supongamos que f y g son derivables en un entorno reducido [1] de a y que ambas tienden a cero cuando la variable tiende hacia el punto a. Si existe el límite

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

NOTA: la regla de l'Hospital se mantiene válida en los casos en que f y g tienden hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ cuando la variable tiende hacia el punto a. La regla también es aplicable aun cuando $x \to \pm\infty$.

Observación

El hecho que no exita el límite $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ no implica que suceda lo mismo con $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Teorema *(Fórmula de Taylor para funciones de una variable real)*

Si se supone que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sus derivadas hasta el orden n: f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$ existen en un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ del punto a, la ***fórmula de Taylor*** para $|h| < \delta$ es la siguiente

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(h)$$

[1] si E es un entorno del punto a, al conjunto $E - \{a\}$ se lo llama ***entorno reducido de*** a

donde el ***término complementario***, ***resto*** o ***error*** $R_n(h)$ puede expresarse en la forma

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

para un c tal que $|c - a| < |h|$.

El polinomio

$$P_n(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se llama ***polinomio de Taylor de orden*** n ***de*** f ***en*** a.